Détermination de la capacité d'un condensateur

Bac S 2009 Asie (ancien programme) · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1 Partie I. Compléter le tableau de l'annexe 3 en indiquant, pour chaque valeur de R, le numéro de la courbe qui représente u_1 et celui de la courbe qui représente u_2.

u_1 est la tension aux bornes du générateur : $u_1 = E = 20$ V à chaque instant, quelle que soit R. C'est la courbe 1.

u_2 est la tension aux bornes du condensateur : elle part de 0 et tend vers E. La charge est d'autant plus lente que $\tau = RC$ est grand, donc que R est grande (C ne change pas) : les courbes 2, 3, 4, 5 correspondent à des résistances croissantes.

R (Ω)	400	800	1200	1600
Courbe de u_1	1	1	1	1
Courbe de u_2	2	3	4	5

u_1 : courbe 1 dans les quatre cas ; u_2 : courbes 2, 3, 4, 5 pour $R = 400, 800, 1200, 1600\ \Omega$.

PIÈGE
Laisser vide la ligne de u_1 ou y mettre quatre numéros différents. L'énoncé prévient qu'un même numéro peut revenir : la tension du générateur idéal ne dépend pas de R.

2 Partie I. Déterminer graphiquement la constante de temps τ de la charge pour $R = 1600\ \Omega$, en expliquant la méthode, puis compléter le tableau de l'annexe 4.

Données utiles courbe 5 de l'annexe 3 (Q1) ; $E = 20$ V

Pour $R = 1600\ \Omega$, u_2 est représentée par la courbe 5.

Méthode : on trace la tangente à cette courbe à l'instant $t = 0$. Elle coupe l'asymptote horizontale $u_2 = E = 20$ V à l'instant $t = \tau$.

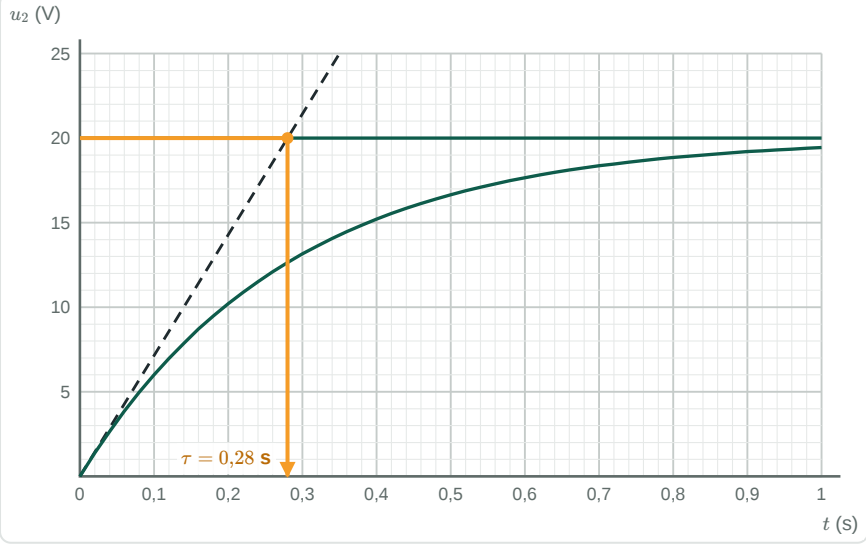
La tangente passe par l'origine et par le point (0,14 s ; 10 V) : elle atteint 20 V à $t = 0{,}28$ s.

R (Ω)	400	800	1200	1600
τ (s)	0,06	0,14	0,21	**0,28**

$\tau = 0{,}28$ s pour $R = 1600\ \Omega$

COMPRENDRE
Vérification : τ est proportionnelle à R. En doublant R de 800 à 1600 Ω, on double τ : $2 \times 0{,}14 = 0{,}28$ s.

MÉTHODE
Autre lecture possible : τ est l'instant où u_2 atteint 63 % de E, soit $0{,}63 \times 20 = 12{,}6$ V. Sur la courbe 5, cette valeur est atteinte vers 0,28 s.



2 · Annexe 3, courbe 5 ($R = 1600\ \Omega$) : tangente à l'origine et asymptote

3 Partie I. Donner l'expression de la constante de temps τ en fonction des caractéristiques du circuit et justifier son unité par une analyse dimensionnelle.

$\tau = RC$

Loi d'Ohm : $u = Ri$, donc $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$.

Pour le condensateur : $q = C\,u$ et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, donc une charge est une intensité multipliée par une durée : $[C] = \dfrac{[Q]}{[U]} = \dfrac{[I]\cdot T}{[U]}$.

$$[RC] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]\cdot T}{[U]} = T$$

$\tau = RC$ a la dimension d'une durée : elle s'exprime en seconde.

PIÈGE
Écrire seulement « $\Omega \times \mathrm{F} = \mathrm{s}$ » n'est pas une justification. Il faut ramener R et C à des grandeurs de base à l'aide de deux relations du cours.

4 Partie I. Tracer sur l'annexe 5 le graphe représentant τ en fonction de R, puis en déduire la valeur de C en expliquant la méthode.

Données utiles tableau de l'annexe 4 complété (Q2) ; échelle : 1 carreau pour 0,02 s et 1 carreau pour 100 Ω

On place les quatre points du tableau. Ils sont pratiquement alignés avec l'origine : on trace la droite passant par l'origine et au plus près des points.

τ est donc proportionnelle à R, en accord avec $\tau = RC$: le coefficient directeur de la droite est égal à C.

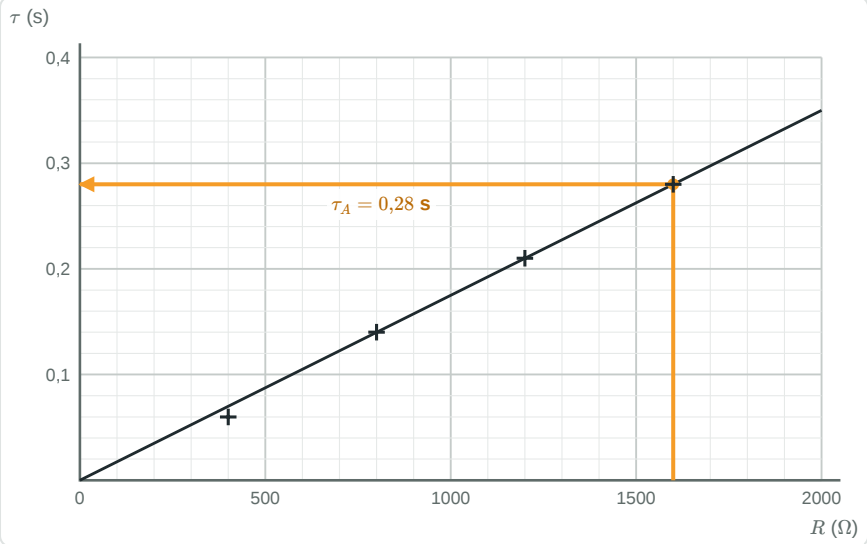
On le calcule avec un point de la droite, A (1600 Ω ; 0,28 s) :

$$C = \frac{\tau_A}{R_A} = \frac{0{,}28}{1600} = 1{,}75 \times 10^{-4}\ \mathrm{F}$$

$C \approx 1{,}8 \times 10^{-4}$ F

PIÈGE
Prendre un point du tableau qui n'est pas sur la droite : celui de 400 Ω est un demi-carreau en dessous. Le coefficient directeur se calcule avec un point de la droite tracée, loin de l'origine.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme les valeurs de τ. Sans calculatrice : $\dfrac{0{,}28}{1600} = \dfrac{0{,}07}{400} = \dfrac{7\times10^{-2}}{4\times10^{2}}$.



4 · Annexe 5 complétée : τ en fonction de R

1 Partie II. Compléter le tableau de l'annexe 6 en associant chaque courbe $u_C(t)$ à la valeur de R qui lui correspond et en donnant le nom du régime de décharge.

Plus R est grande, plus l'énergie est dissipée rapidement par effet Joule, donc plus les oscillations s'amortissent vite ; si R est trop grande, il n'y a plus d'oscillation.

- Courbe c : oscillations peu amorties, $R = 2\ \Omega$.
- Courbe a : oscillations vite amorties, $R = 10\ \Omega$.
- Courbe b : aucune oscillation, $R = 1000\ \Omega$.

R	$2\ \Omega$	$10\ \Omega$	$1000\ \Omega$
Courbe	c	a	b
Régime	pseudo-périodique	pseudo-périodique	apériodique

$2\ \Omega$: courbe c et $10\ \Omega$: courbe a (régime pseudo-périodique) ; $1000\ \Omega$: courbe b (régime apériodique).

PIÈGE
Qualifier de « périodique » les courbes a et c. L'amplitude diminue : le régime est pseudo-périodique. Il ne serait périodique que pour une résistance nulle.

COMPRENDRE
La bobine et les oscillations du circuit RLC étaient au programme de Terminale S. Le programme actuel de spécialité se limite au circuit RC : cette partie II sert d'approfondissement.

2 Partie II. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $u_C(t)$ si la résistance R est nulle.

Loi des mailles, avec les flèches de la figure 2 : $u_R + u_L + u_C = 0$.

$R = 0$, donc $u_R = Ri = 0$. Il reste $u_L + u_C = 0$.

Bobine idéale : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Condensateur : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ avec $q = C\,u_C$,

donc $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$.

D'où $LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C = 0$, soit :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

PIÈGE
Une erreur de signe donne $\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{u_C}{LC} = 0$, qui ne décrit pas des oscillations. Sur la figure 2, les trois dipôles sont fléchés en convention récepteur : aucun signe moins dans les relations.

3 Partie II. Déterminer la période propre T_0 des oscillations, donner son expression en fonction des caractéristiques du circuit, puis en déduire la valeur de C.

Données utiles $L = 0{,}50$ H ; $(0{,}060)^2 = 3{,}6 \times 10^{-3}$; $\pi^2 \approx 10$

a. Sur la courbe, trois périodes séparent les maximums situés à $t = 0$ et $t = 0{,}180$ s : $3\,T_0 = 0{,}180$ s, donc $T_0 = 0{,}060$ **s**.

Expression de la période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

b. En élevant au carré : $T_0^2 = 4\pi^2 LC$, donc $C = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2 L}$.

$$C = \frac{(0{,}060)^2}{4 \times 10 \times 0{,}50} = \frac{3{,}6 \times 10^{-3}}{20} = 1{,}8 \times 10^{-4}\ \text{F}$$

$T_0 = 0{,}060$ s et $C = 1{,}8 \times 10^{-4}$ F, en accord avec la première méthode.

PIÈGE
Oublier d'élever 2π au carré, ou garder π^2 au numérateur. Vérifier l'ordre de grandeur : les deux méthodes doivent donner la même capacité.

MÉTHODE
Mesurer plusieurs périodes puis diviser réduit l'incertitude de lecture : ici trois périodes entre le premier et le dernier maximum visibles.