Mesure de la valeur de la capacité d'un condensateur

Bac S 2008 Inde (Pondichéry) (ancien programme) · Exercice 1 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

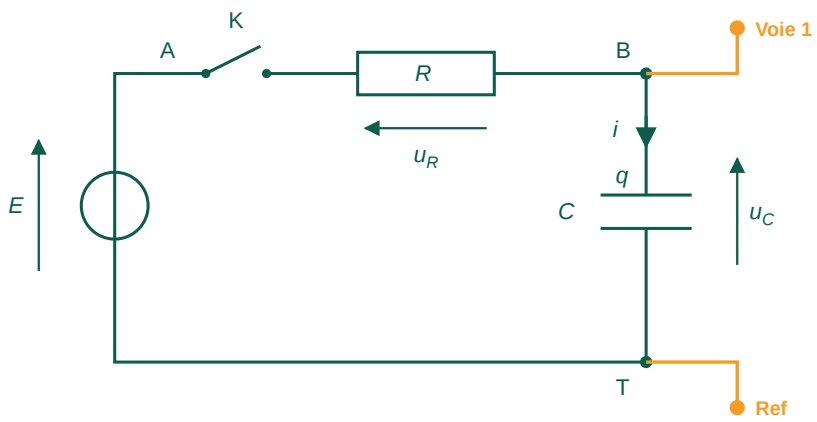
3.1 Refaire le schéma du montage n°1 en indiquant les branchements (Voie 1 et Ref) permettant de suivre la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

La tension u_C est fléchée de T vers B : $u_C = V_B - V_T$.

Le système d'acquisition mesure la tension entre la voie et la référence, $V_{\text{Voie 1}} - V_{\text{Ref}}$.

Voie 1 est reliée au point **B** et **Ref** (masse) au point **T**.

PIÈGE
Inverser les deux fils : on enregistrerait $-u_C$, une courbe négative. La pointe de la flèche tension désigne la borne à relier à la voie.



3.1 · Montage n°1 avec les branchements du système d'acquisition (en orange)

3.2.1 Que signifie l'expression « phénomène caractérisé par τ » ? À l'aide de la courbe, estimer l'ordre de grandeur de τ sans aucun calcul.

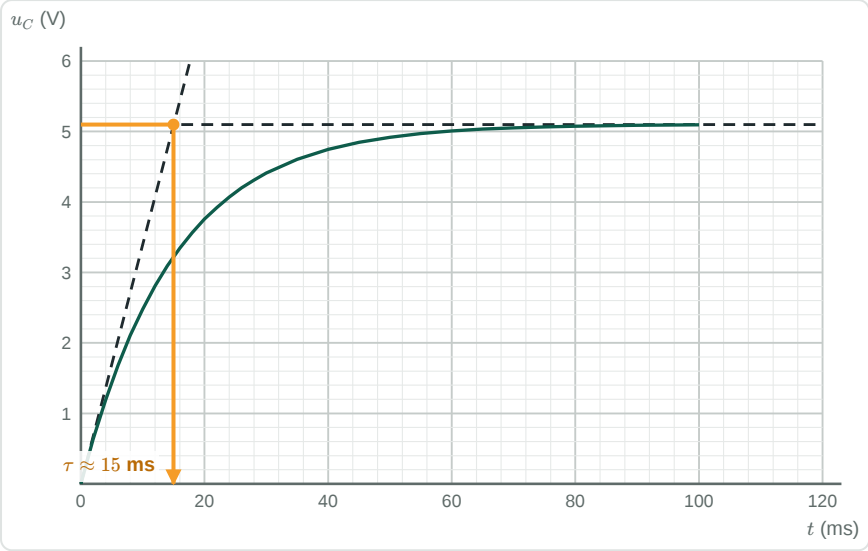
La charge du condensateur n'est pas instantanée : τ fixe l'échelle de durée de ce régime transitoire. Plus τ est grand, plus la charge est lente ; au bout de quelques τ (environ 5τ), le condensateur est pratiquement chargé et $u_C \approx E$.

Estimation graphique : on trace l'asymptote horizontale $u_C = E = 5{,}1$ V et la tangente à la courbe à l'origine. Elles se coupent au point d'abscisse $t = \tau$. On lit $\tau \approx 15$ ms.

τ est de l'ordre de 10 ms, soit 10^{-2} s.

PIÈGE
Confondre τ avec la durée totale de la charge. Sur la courbe, le palier est atteint vers 70 ms, soit environ 5τ, et non à $t = \tau$.

COMPRENDRE
Le tracé d'une tangente est peu précis : on n'attend ici qu'un ordre de grandeur. La valeur sera affinée en 3.4.3 par une lecture plus sûre.



3.2.1 · Courbe n°1 : asymptote $u_C = E$ et tangente à l'origine, qui se coupent à $t = \tau$

3.2.2 Donner l'expression de τ en fonction des caractéristiques des composants du circuit.

$\tau = RC$, avec R en ohm, C en farad et τ en seconde.

3.2.3 Vérifier que l'expression précédente est homogène à un temps.

Loi d'Ohm, $u = Ri$: $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$

Pour le condensateur, $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$: $[I] = [C]\dfrac{[U]}{[T]}$, donc $[C] = \dfrac{[I]\,[T]}{[U]}$

$$[RC] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]\,[T]}{[U]} = [T]$$

Le produit RC a la dimension d'un temps : τ s'exprime en seconde.

MÉTHODE
Pour trouver la dimension d'une grandeur, partir d'une relation simple où elle apparaît ($u = Ri$, $q = Cu$, $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$), puis remplacer chaque grandeur par sa dimension. Une dérivée par rapport au temps divise par $[T]$.

3.3.1 Écrire la relation qui existe entre E, u_R et u_C.

Loi d'additivité des tensions (loi des mailles), interrupteur fermé :

$E = u_R + u_C$

PIÈGE
Les signes dépendent du sens des flèches. Ici u_R et u_C sont orientées dans le même sens le long de la branche A-B-T, et E est la tension entre A et T.

3.3.2 Exprimer u_R en fonction de l'intensité i du courant.

Loi d'Ohm, la flèche de u_R étant opposée au sens de i (convention récepteur) :

$u_R = Ri$

3.3.3 Rappeler l'expression de i en fonction de q, charge portée par l'armature reliée au point B.

Le courant i est orienté vers l'armature qui porte la charge q :

$i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

COMPRENDRE
L'intensité est un débit de charge. Si i était orienté en sens inverse (sortant de l'armature de charge q), on écrirait $i = -\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

3.3.4 Rappeler l'expression de q en fonction de u_C. En déduire celle de i en fonction de u_C.

$q = C\,u_C$

La capacité C est une constante, donc $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(C\,u_C)}{\mathrm{d}t}$:

$$\boxed{q = C\,u_C \text{ et } i = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}$$

3.3.5 Montrer que la tension $u_C(t)$ vérifie l'équation différentielle $\tau\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$ (1).

$E = u_R + u_C$ (3.3.1)

$E = R\,i + u_C$ (3.3.2)

$E = R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$ (3.3.4)

En posant $\tau = R\,C$:

$$\boxed{\tau\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E}$$

MÉTHODE
Toujours la même chaîne pour un circuit RC : loi des mailles, loi d'Ohm, puis $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Il ne doit rester qu'une seule fonction inconnue, ici u_C.

3.4.1 Vérifier que $u_C(t) = E\left[1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right]$ est solution de l'équation différentielle et satisfait à la condition initiale (condensateur déchargé à $t = 0$).

On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{\tau}\,\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

On reporte dans le premier membre de (1) :

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E - E\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = E$$

L'équation (1) est vérifiée à tout instant.

Condition initiale : $u_C(0) = E\,[1 - \exp(0)] = E\,(1 - 1) = 0$ V, le condensateur est bien déchargé.

$$\boxed{u_C(t) = E\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \text{ vérifie (1) et } u_C(0) = 0.}$$

PIÈGE
Erreur de signe dans la dérivée : la dérivée de $\exp(-t/\tau)$ est $-\dfrac{1}{\tau}\exp(-t/\tau)$, et le signe « $-$ » placé devant l'exponentielle la rend positive.

MÉTHODE
« Vérifier qu'une fonction est solution » : on ne résout pas l'équation. On dérive, on remplace dans un membre et on montre qu'on obtient l'autre. La condition initiale se contrôle séparément.

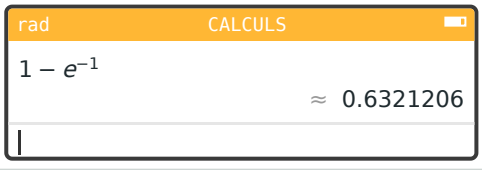
3.4.2 Déterminer la valeur du rapport $\dfrac{u_C}{E}$ à la date $t = \tau$.

À $t = \tau$: $u_C(\tau) = E\,[1 - \exp(-1)]$, donc

$$\frac{u_C(\tau)}{E} = 1 - \exp(-1) = 0{,}63$$

$$\boxed{\frac{u_C(\tau)}{E} = 0{,}63 : \text{à } t = \tau, \text{ la tension atteint } 63\ \% \text{ de sa valeur finale.}}$$

À LA CALCULATRICE



3.4.3 En utilisant ce résultat et en exploitant la courbe n°1, déterminer la valeur de τ puis celle de C.

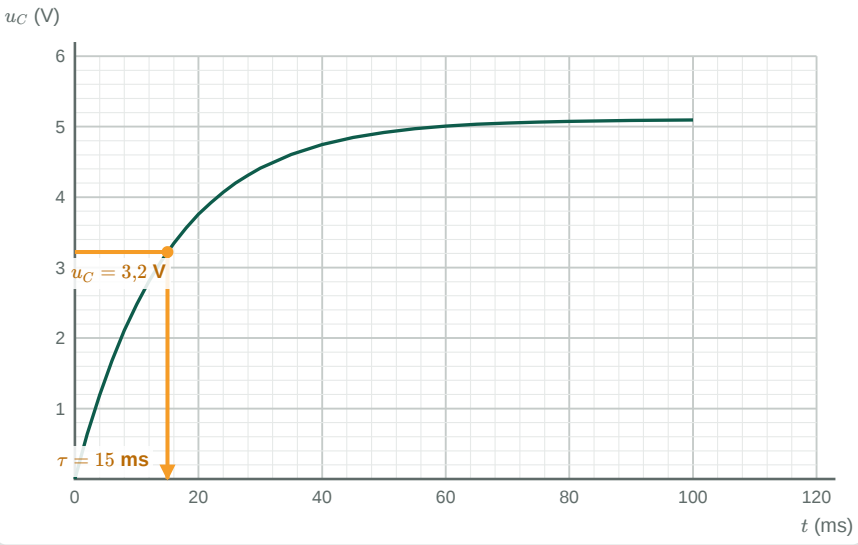
Données utiles $E = 5{,}1$ V ; $R = 150\ \Omega$; $\dfrac{u_C(\tau)}{E} = 0{,}63$ (3.4.2)

$u_C(\tau) = 0{,}63 \times E = 0{,}63 \times 5{,}1 = 3{,}2$ V

Sur la courbe n°1, on trace l'horizontale $u_C = 3{,}2$ V ; elle coupe la courbe au point d'abscisse $\tau = 15$ ms.

Comme $\tau = RC$: $\quad C = \dfrac{\tau}{R} = \dfrac{15 \times 10^{-3}}{150} = 1{,}0 \times 10^{-4}$ F

$\tau = 15$ ms et $C = 1{,}0 \times 10^{-4}$ F $= 0{,}10$ mF

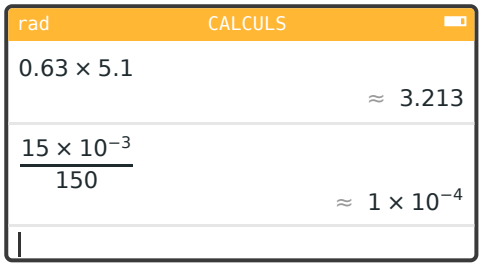


3.4.3 · Courbe n°1 : lecture de τ pour $u_C = 0{,}63\,E = 3{,}2$ V

PIÈGE
Laisser τ en millisecondes dans le calcul : on trouverait $0{,}10$ et on l'annoncerait en farad, soit mille fois trop.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs : E et la lecture de τ n'en ont que deux. À un demi-carreau près, τ vaut entre 14 et 16 ms, donc C est connue à environ $7\,\%$ près.

À LA CALCULATRICE



3.5 Proposer le principe d'au moins une autre mesure de la capacité C.

Charge à courant constant : on relie le condensateur, initialement déchargé, à un générateur de courant d'intensité constante I_0 et on enregistre $u_C(t)$.

Comme $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = I_0$, la charge vaut $q = I_0\,t$, d'où $u_C = \dfrac{q}{C} = \dfrac{I_0}{C}\,t$.

La courbe $u_C(t)$ est une droite passant par l'origine, de coefficient directeur $a = \dfrac{I_0}{C}$.

On mesure la pente a de la droite et on calcule $C = \dfrac{I_0}{a}$.

COMPRENDRE
Autres possibilités acceptées : étudier la décharge du condensateur dans le conducteur ohmique (on retrouve $\tau = RC$), ou mesurer directement C avec un capacimètre.