Chute d'une bille dans la glycérine

Bac S 2008 Antilles-Guyane (ancien programme) · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

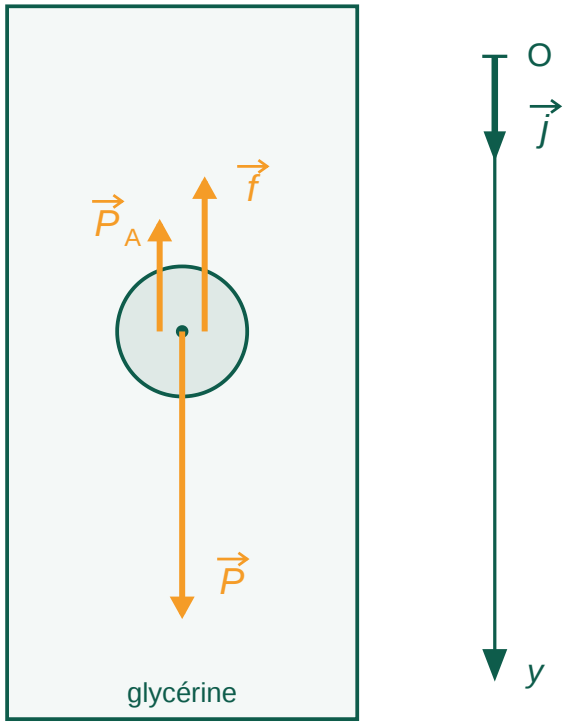
1.1 Représenter sur un schéma, sans souci d'échelle, les forces appliquées à la bille en mouvement dans le liquide : poids $\vec{P}$, poussée d'Archimède $\vec{P}_A$ et force de frottement fluide $\vec{f}$.

Les trois forces sont verticales :

- le poids $\vec{P}$, vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\vec{P}_A$, vers le haut ;
- la force de frottement $\vec{f}$, opposée au vecteur vitesse, donc vers le haut puisque la bille descend.

Schéma ci-dessous : $\vec{P}$ vers le bas, $\vec{P}_A$ et $\vec{f}$ vers le haut.

PIÈGE
Dessiner $\vec{f}$ vers le bas. Le frottement s'oppose toujours au mouvement : la bille descend, donc $\vec{f}$ pointe vers le haut, comme $\vec{P}_A$.



1.1 · Forces appliquées à la bille pendant la chute (sans souci d'échelle)

1.2 Exprimer littéralement la valeur P du poids de la bille en fonction de ρ, V et g.

$P = m\,g$ et la masse de la bille est $m = \rho\,V$.

$$P = \rho\,V\,g$$

1.3 Exprimer la valeur P_A de la poussée d'Archimède en fonction de ρ_0, V et g.

La poussée d'Archimède a pour valeur le poids du liquide déplacé. La bille est entièrement immergée : elle déplace un volume V de glycérine, de masse $\rho_0\,V$.

$$P_A = \rho_0\,V\,g$$

PIÈGE
Utiliser ρ (l'acier) à la place de ρ_0. La poussée d'Archimède dépend de la masse volumique du fluide, pas de celle de l'objet.

1.4.1 La bille atteint sa vitesse limite avant le repère R_1. Quel est son mouvement entre R_1 et R_2 ? Justifier.

La trajectoire est une droite verticale. Entre R_1 et R_2, la vitesse limite est déjà atteinte : la valeur de la vitesse reste égale à v_{lim}. Le vecteur vitesse est donc constant.

Le mouvement de la bille est **rectiligne uniforme**.

1.4.2 Quelle est alors la relation vectorielle liant les forces appliquées à la bille ? Justifier.

Dans le référentiel terrestre galiléen, le mouvement de la bille est rectiligne uniforme. D'après la première loi de Newton (principe d'inertie), les forces appliquées à la bille se compensent.

$$\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = \vec{0}$$

PIÈGE
Écrire $P + P_A + f = 0$ avec les valeurs : c'est faux, une somme de nombres positifs n'est pas nulle. La relation demandée est vectorielle.

1.5.1 La force de frottement est $\vec{f} = -6\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$. À la suite d'une analyse dimensionnelle, donner l'unité de η.

En valeur, $f = 6\pi\,\eta\,r\,v$, donc $\eta = \dfrac{f}{6\pi\,r\,v}$; le facteur 6π est sans dimension.

Une force est le produit d'une masse par une accélération : $[f] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$.

$$[\eta] = \frac{[f]}{[r]\,[v]} = \frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{L}\times\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}} = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{T}^{-1}$$

η s'exprime en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

COMPRENDRE
Cette unité est aussi le pascal seconde : $1\ \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s} = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. C'est l'unité « SI » de la question 1.6.3.

MÉTHODE
Pour l'unité d'une force, partir de $F = m\,a$: un newton vaut un $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. On isole ensuite la grandeur cherchée et on simplifie les dimensions.

1.5.2 En projetant la relation de la question 1.4.2 sur l'axe $(O,\vec{j})$, montrer que $\eta = \dfrac{2\,r^2\,g\,(\rho-\rho_0)}{9\,v_{lim}}$.

Avec $\vec{j}$ orienté vers le bas et $\vec{v} = v_{lim}\,\vec{j}$: $\vec{P} = \rho V g\,\vec{j}$, $\vec{P}_A = -\rho_0 V g\,\vec{j}$ et $\vec{f} = -6\pi\,\eta\,r\,v_{lim}\,\vec{j}$.

La projection de $\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = \vec{0}$ sur l'axe donne :

$$\rho V g - \rho_0 V g - 6\pi\,\eta\,r\,v_{lim} = 0 \quad \text{soit} \quad \eta = \frac{V g\,(\rho-\rho_0)}{6\pi\,r\,v_{lim}}$$

Avec $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$: $\eta = \dfrac{4\pi r^3\,g\,(\rho-\rho_0)}{3\times 6\pi\,r\,v_{lim}}$, et comme $\dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$:

$\eta = \dfrac{2\,r^2\,g\,(\rho-\rho_0)}{9\,v_{lim}}$: c'est la relation attendue.

PIÈGE
Se tromper de signe en projetant. L'axe est orienté vers le bas : seul le poids a une coordonnée positive, $\vec{P}_A$ et $\vec{f}$ ont une coordonnée négative.

1.6.1 Calculer la vitesse limite v_{lim} de la bille.

Données utiles $h = 40{,}0$ cm ; $\Delta t' = 1{,}66$ s

Le mouvement est uniforme entre R_1 et R_2 : $v_{lim} = \dfrac{h}{\Delta t'}$.

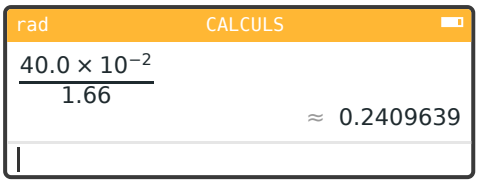
$$v_{lim} = \frac{40{,}0\times 10^{-2}}{1{,}66} = 0{,}241\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$v_{lim} = 0{,}241\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

PIÈGE
Laisser h en centimètres : on obtiendrait 24,1, qui n'est pas en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

COMPRENDRE
Les données h et $\Delta t'$ ont trois chiffres significatifs : le résultat en garde trois. Cette règle vaut pour tous les calculs de l'exercice.

À LA CALCULATRICE



1.6.2 En déduire la valeur expérimentale de la viscosité η de la glycérine à la température d'étude.

Données utiles $r = 5{,}00$ mm ; $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $\rho = 7{,}80 \times 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $\rho_0 = 1{,}26 \times 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; v_{lim} (1.6.1)

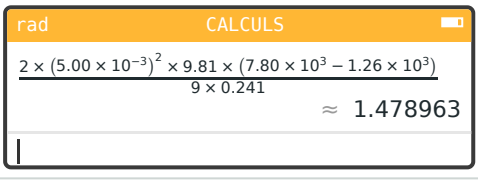
$$\eta = \frac{2\,r^2\,g\,(\rho - \rho_0)}{9\,v_{lim}} \text{ avec } r = 5{,}00 \times 10^{-3} \text{ m :}$$

$$\eta = \frac{2 \times (5{,}00 \times 10^{-3})^2 \times 9{,}81 \times (7{,}80 \times 10^3 - 1{,}26 \times 10^3)}{9 \times 0{,}241}$$

$\eta = 1{,}48\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ à 20 °C

PIÈGE
Oublier de convertir le rayon en mètres. Comme r est au carré, l'erreur multiplie le résultat par un million.

À LA CALCULATRICE



1.6.3 La valeur théorique est $\eta_{thé} = 1{,}49$ SI. Par un calcul d'écart relatif, comparer la valeur expérimentale de η à sa valeur théorique.

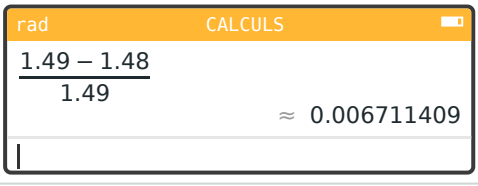
Données utiles $\eta = 1{,}48$ SI (1.6.2)

$$\frac{|\eta - \eta_{thé}|}{\eta_{thé}} = \frac{|1{,}48 - 1{,}49|}{1{,}49} = 6{,}7 \times 10^{-3} \approx 0{,}7\ \%$$

Écart relatif de $0{,}7\ \%$: la valeur expérimentale est très proche de la valeur théorique, la mesure est satisfaisante.

MÉTHODE
Écart relatif : différence entre valeur mesurée et valeur de référence, en valeur absolue, divisée par la valeur de référence. Toujours conclure par une phrase.

À LA CALCULATRICE



2.1 À l'aide de la deuxième loi de Newton, montrer que la vitesse vérifie $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + A\,v = B$ avec $A = 34{,}4\ \mathrm{s}^{-1}$ et $B = 8{,}23\ \mathrm{m\cdot s}^{-2}$. Identifier les expressions de A et B.

Données utiles $\eta_{thé} = 1{,}49$ SI ; r, ρ, ρ_0, g (données du sujet)

Système {bille}, de masse $m = \rho V$; référentiel terrestre supposé galiléen ; forces : $\vec{P}$, $\vec{P}_A$, $\vec{f}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = m\vec{a}$. En projection sur l'axe $(O, \vec{j})$, avec $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$:

$$\rho V g - \rho_0 V g - 6\pi\,\eta\,r\,v = \rho V \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

En divisant par ρV : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{6\pi\,\eta\,r}{\rho V} v = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$

Par identification, et avec $V = \frac{4}{3}\pi r^3$: $A = \frac{6\pi\,\eta\,r}{\rho V} = \frac{9\,\eta}{2\,\rho\,r^2}$ et $B = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$.

$A = \frac{9 \times 1{,}49}{2 \times 7{,}80 \times 10^3 \times (5{,}00 \times 10^{-3})^2} = 34{,}4\ \mathrm{s}^{-1}$ $\quad B = 9{,}81 \times \left(1 - \frac{1{,}26 \times 10^3}{7{,}80 \times 10^3}\right) = 8{,}23\ \mathrm{m\cdot s}^{-2}$

$A = \frac{9\,\eta}{2\,\rho\,r^2} = 34{,}4\ \mathrm{s}^{-1}$ et $B = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) = 8{,}23\ \mathrm{m\cdot s}^{-2}$: valeurs attendues.

COMPRENDRE
La valeur $A = 34{,}4\ \mathrm{s}^{-1}$ de l'énoncé correspond à la viscosité théorique $1{,}49$ SI. Avec la valeur expérimentale $1{,}48$ SI, on trouverait $34{,}2\ \mathrm{s}^{-1}$.

MÉTHODE
Pour une équation différentielle de chute : deuxième loi de Newton, projection sur l'axe, puis division par la masse pour que le coefficient de $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ soit égal à 1.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{9 \times 1.49}{2 \times 7.80 \times 10^3 \times (5.00 \times 10^{-3})^2} \approx 34.38462$

$9.81 \times \left(1 - \frac{1.26 \times 10^3}{7.80 \times 10^3}\right) \approx 8.225308$

2.2 En déduire la valeur de la vitesse limite atteinte par la bille. Est-elle en accord avec la valeur expérimentale de la question 1.6.1 ?

Données utiles $A = 34{,}4\ \mathrm{s}^{-1}$; $B = 8{,}23\ \mathrm{m\cdot s}^{-2}$; $v_{lim,exp} = 0{,}241\ \mathrm{m\cdot s}^{-1}$ (1.6.1)

Quand la vitesse limite est atteinte, v est constante : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation devient $A\,v_{lim} = B$, soit $v_{lim} = \frac{B}{A}$.

$$v_{lim} = \frac{8{,}23}{34{,}4} = 0{,}239\ \mathrm{m\cdot s}^{-1}$$

Écart relatif avec la valeur expérimentale : $\frac{0{,}241 - 0{,}239}{0{,}241} = 0{,}8\ \%$.

$v_{lim} = 0{,}239\ \mathrm{m\cdot s}^{-1}$, en accord avec la valeur expérimentale $0{,}241\ \mathrm{m\cdot s}^{-1}$ (écart inférieur à 1 %).

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{8.23}{34.4} \approx 0.2392442$

$\frac{0.241 - 0.239}{0.241} \approx 0.008298755$

2.3 À quelle grandeur physique le rapport $1/A$ correspond-il ? Même question pour le paramètre B.

A s'exprime en s^{-1}, donc $\frac{1}{A}$ est une durée : c'est le temps caractéristique τ du mouvement, $\tau = \frac{1}{A} = \frac{1}{34{,}4} = 2{,}91 \times 10^{-2}$ s.

À $t = 0$, la bille est lâchée sans vitesse : $v(0) = 0$. L'équation différentielle donne alors $\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = B$.

$\frac{1}{A} = \tau$ est le temps caractéristique ; B est l'accélération initiale de la bille.

COMPRENDRE
B est inférieur à g : dès le départ, la poussée d'Archimède s'oppose au poids. Ce n'est pas une chute libre, même à l'instant initial où le frottement est nul.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{1}{34.4} \approx 0.02906977$

2.4.1 Quel est le pas Δt utilisé pour les calculs de la méthode d'Euler ?

Le pas est l'écart entre deux dates successives du tableau : $\Delta t = 0{,}025 - 0{,}020$.

$\Delta t = 0{,}005 \text{ s} = 5 \text{ ms}$

2.4.2 En utilisant la méthode d'Euler, calculer la vitesse v_6 à la date $t = 0{,}030$ s et l'accélération a_7 à la date $t = 0{,}035$ s.

Données utiles tableau 1 : $v_5 = 0{,}146 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $a_5 = 3{,}20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $v_7 = 0{,}175 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; Δt (2.4.1) ; A et B (2.1)

Vitesse : $v_6 = v_5 + a_5 \, \Delta t = 0{,}146 + 3{,}20 \times 0{,}005 = 0{,}162 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Accélération : $a_7 = B - A\, v_7 = 8{,}23 - 34{,}4 \times 0{,}175 = 2{,}21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$v_6 = 0{,}162 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $a_7 = 2{,}21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

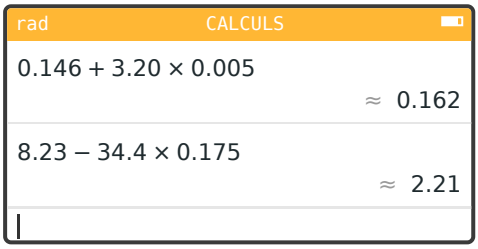
PIÈGE

Mélanger les lignes du tableau. La vitesse se calcule avec la vitesse et l'accélération de la ligne précédente ; l'accélération se calcule avec la vitesse de la même ligne.

COMPRENDRE

Vérification : $a_6 = 8{,}23 - 34{,}4 \times 0{,}162 = 2{,}66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, proche du $2{,}65$ du tableau, calculé par le tableur avec une vitesse non arrondie.

À LA CALCULATRICE

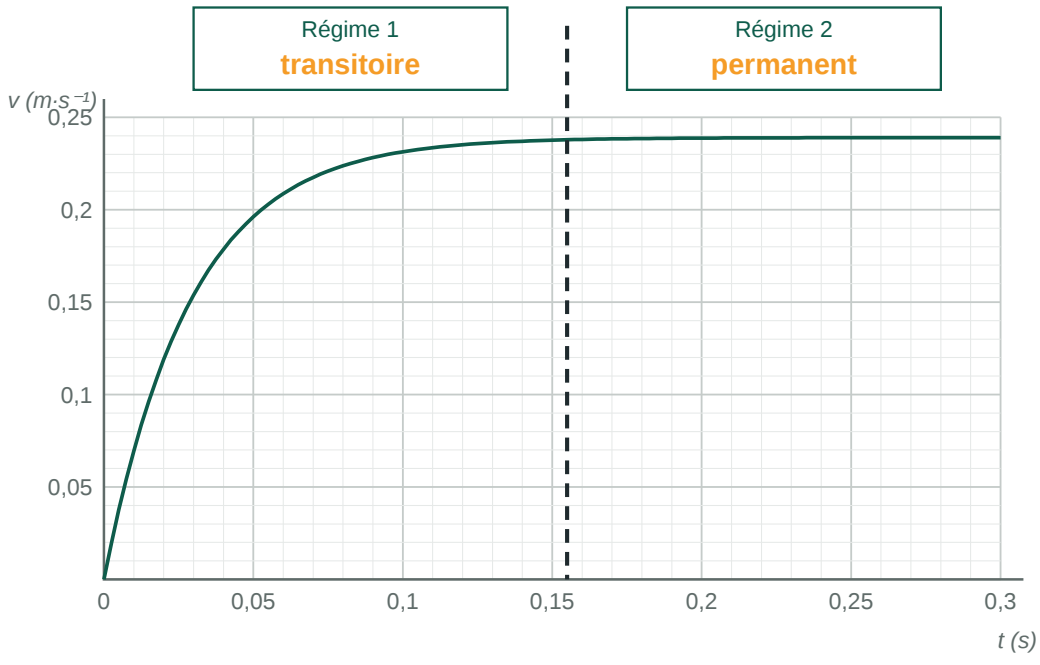


2.5.1 Compléter les cases de la figure 2 de l'annexe en identifiant les deux régimes du mouvement.

Régime 1 (avant le trait en pointillé) : la vitesse augmente, c'est le régime **transitoire**.

Régime 2 (après le trait) : la vitesse garde la valeur constante v_{lim}, c'est le régime **permanent**.

Régime 1 : transitoire ; régime 2 : permanent (annexe complétée ci-dessous).



2.5.1 · Figure 2 de l'annexe complétée

2.5.2 Déterminer graphiquement le temps caractéristique τ en expliquant la méthode.

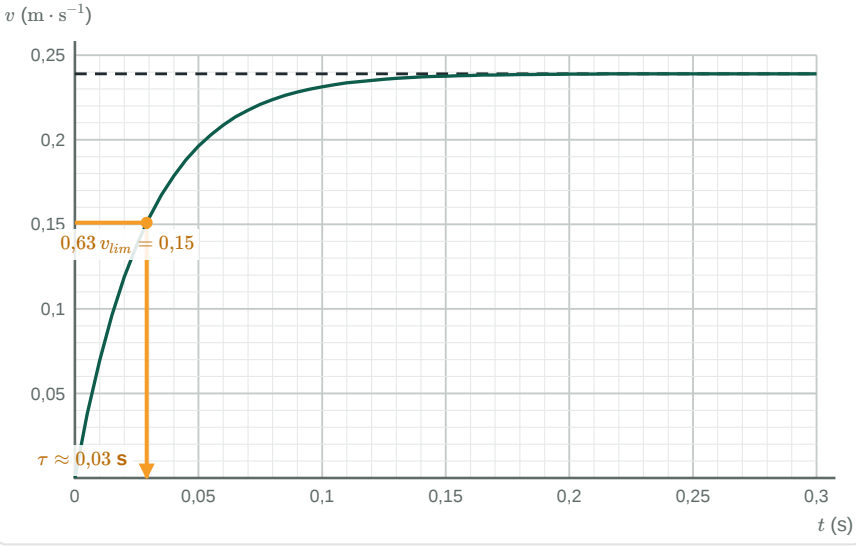
Données utiles figure 2 de l'annexe ; $v_{lim} = 0{,}239\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (2.2)

À la date $t = \tau$, la vitesse vaut 63 % de la vitesse limite : $0{,}63 \times 0{,}239 = 0{,}15\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On trace l'horizontale d'ordonnée $0{,}15\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ jusqu'à la courbe, puis on lit l'abscisse du point d'intersection.

$\tau \approx 0{,}03$ s, valeur cohérente avec $\dfrac{1}{A} = 0{,}029$ s.

MÉTHODE
Autre tracé possible : la tangente à la courbe à l'origine coupe l'asymptote horizontale $v = v_{lim}$ au point d'abscisse τ.



2.5.2 · Lecture de τ sur la figure 2 : abscisse du point d'ordonnée $0{,}63\,v_{lim}$

À LA CALCULATRICE

