Bobine d'un woofer

Bac S 2008 Amérique du Sud (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1 Expliquer comment Frédéric a obtenu la courbe $i(t)$ du document 1 à partir de la courbe $u_R(t)$ enregistrée.

Données utiles $R = 10\ \Omega$

Loi d'Ohm aux bornes du conducteur ohmique : $u_R = R\,i$. Frédéric fait donc calculer par le logiciel, à chaque date, la grandeur :

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{u_R}{10}$$ (avec u_R en volts et i en ampères)

COMPRENDRE
Diviser par une constante ne change pas l'allure : $i(t)$ et $u_R(t)$ ont la même forme, seule l'échelle verticale diffère. C'est pourquoi on visualise un courant en mesurant la tension aux bornes d'une résistance.

2 Quelle est la valeur de l'intensité I du courant en régime permanent ?

En régime permanent, l'intensité ne varie plus : la courbe du document 1 présente un palier horizontal. On lit l'ordonnée de ce palier.

$$I = 430\ \text{mA} = 0{,}430\ \text{A}$$

PIÈGE
Lire 450 mA, qui est la dernière graduation de l'axe. Le palier est un peu en dessous : une petite division vaut 10 mA.

3 Montrer que l'intensité en régime permanent s'écrit $I = \dfrac{E}{R+r}$.

Loi d'additivité des tensions, interrupteur fermé : $E = u_L + u_R$.

Avec $u_R = R\,i$ et, pour la bobine en convention récepteur, $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + r\,i$:

$$E = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (R+r)\,i$$

En régime permanent, $i = I$ est constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ et $E = (R+r)\,I$.

$$I = \frac{E}{R+r}$$

COMPRENDRE
En régime permanent, la bobine se comporte comme un simple conducteur ohmique de résistance r : le terme $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ n'existe que lorsque le courant varie.

4 Vérifier la valeur de la résistance interne r de la bobine.

Données utiles $E = 6{,}0$ V ; $R = 10\ \Omega$; $I = 0{,}430$ A (question 2)

D'après la question 3, $R + r = \dfrac{E}{I}$, donc $r = \dfrac{E}{I} - R$.

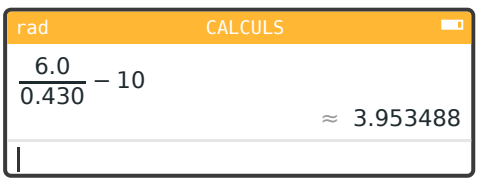
$$r = \frac{6{,}0}{0{,}430} - 10 = 3{,}95\ \Omega$$

$r \approx 4{,}0\ \Omega$: on retrouve la valeur annoncée par Frédéric.

PIÈGE
Laisser I en milliampères : $\dfrac{6{,}0}{430}$ donne une résistance négative après soustraction de R. L'intensité doit être en ampères.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme E et R. Le résultat vient d'une différence de deux valeurs proches (14 et 10) : une petite erreur de lecture sur I se répercute fortement sur r.

À LA CALCULATRICE



5 Quel appareil permet de vérifier que la résistance interne de la bobine vaut $4{,}0\ \Omega$?

On mesure directement la résistance de la bobine, débranchée du circuit, avec un multimètre réglé sur sa fonction de mesure des résistances.

Un **ohmmètre**, branché aux bornes de la bobine seule.

PIÈGE
Brancher l'ohmmètre sur la bobine encore reliée au circuit sous tension : la mesure est fausse et l'appareil peut être endommagé.

6 Déterminer graphiquement, en détaillant la méthode, la constante de temps τ du circuit.

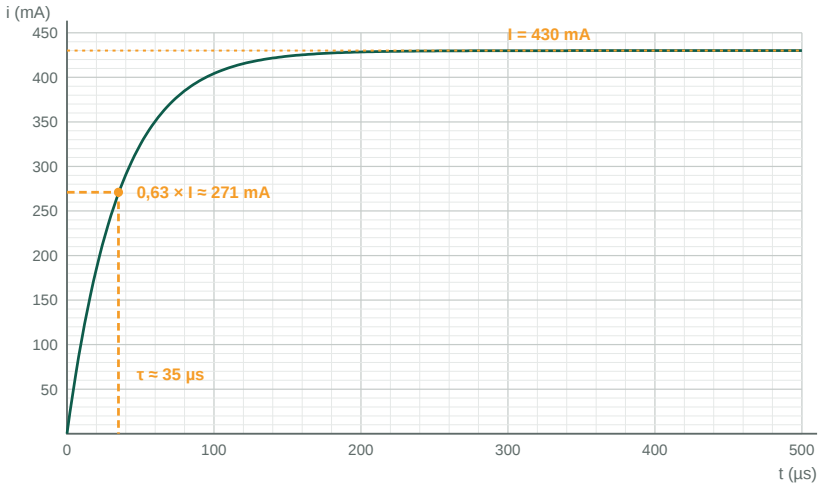
Données utiles $I = 430\ \text{mA}$ (question 2)

À la date $t = \tau$, l'intensité atteint 63 % de sa valeur finale :

$$i(\tau) = 0{,}63 \times I = 0{,}63 \times 430 = 271\ \text{mA}$$

On trace la droite horizontale d'ordonnée 271 mA ; elle coupe la courbe en un point dont on lit l'abscisse.

$\tau \approx 35\ \mu\text{s}$

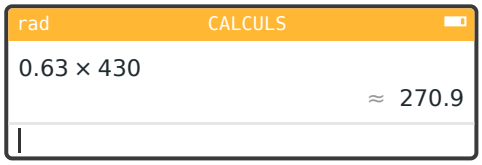


6 · Document 1 complété : lecture de τ à 63 % de la valeur finale

PIÈGE
L'axe des abscisses est gradué en microsecondes : une petite division vaut 10 µs. Pour la suite, il faut écrire $\tau = 35 \times 10^{-6}$ s.

MÉTHODE
Autre méthode acceptée : tracer la tangente à l'origine ; elle coupe l'asymptote $i = I$ à la date $t = \tau$. La lecture à 63 % est plus précise, car le tracé d'une tangente est délicat.

À LA CALCULATRICE



7 Donner l'expression de la constante de temps τ en fonction des grandeurs caractéristiques du circuit.

La constante de temps d'un dipôle RL est le quotient de l'inductance par la résistance totale du circuit, ici $R + r$.

$$\tau = \frac{L}{R + r}$$

PIÈGE
Écrire $\tau = \dfrac{L}{R}$: la résistance interne r de la bobine est en série avec R et compte dans la résistance totale.

8 En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.

Données utiles $\tau = 35\ \mu\text{s}$ (question 6) ; $R = 10\ \Omega$; $r = 4{,}0\ \Omega$

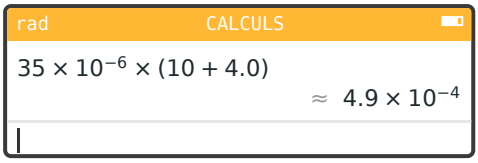
$$L = \tau\,(R + r)$$

$$L = 35 \times 10^{-6} \times (10 + 4{,}0) = 4{,}9 \times 10^{-4}\ \text{H}$$

$L \approx 4{,}9 \times 10^{-4}\ \text{H} = 0{,}49\ \text{mH}$

COMPRENDRE
Le résultat est bien de l'ordre du millihenry, comme l'annonce le professeur. Avec les valeurs de la partie C, $L = \dfrac{E}{A} = 0{,}50\ \text{mH}$: les deux déterminations concordent.

À LA CALCULATRICE



9 Établir l'équation 1 et vérifier que $A = \dfrac{E}{L}$ et $B = \dfrac{R+r}{L}$.

La loi d'additivité des tensions (question 3) donne :

$$E = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (R+r)\,i$$

On isole la dérivée : $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E - (R+r)\,i$, puis on divise par L :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{L} - \frac{R+r}{L}\,i$$

Par identification avec $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = A - B\,i$: $A = \dfrac{E}{L}$ et $B = \dfrac{R+r}{L}$.

COMPRENDRE
$B = \dfrac{1}{\tau}$ et $\dfrac{A}{B} = \dfrac{E}{R+r} = I$. Le circuit RC étudié en terminale obéit à une équation de même forme, avec $\tau = RC$: les méthodes sont identiques.

10 Établir, par une analyse dimensionnelle, l'unité de B dans le système international.

$B = \dfrac{R+r}{L}$, donc $[B] = \dfrac{[R]}{[L]}$.

Loi d'Ohm $u = R\,i$: $[R] = [U]\cdot[I]^{-1}$.

Pour une bobine idéale, $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$: $[U] = [L]\cdot[I]\cdot[T]^{-1}$, soit $[L] = [U]\cdot[I]^{-1}\cdot[T]$.

$$[B] = \frac{[U]\cdot[I]^{-1}}{[U]\cdot[I]^{-1}\cdot[T]} = [T]^{-1}$$

B est l'inverse d'un temps : il s'exprime en s^{-1}.

MÉTHODE
Vérification rapide sur l'équation 1 : $B\,i$ s'ajoute à $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, donc a la même dimension, $[I]\cdot[T]^{-1}$. En divisant par $[I]$, on retrouve $[T]^{-1}$.

11 Compléter par la méthode d'Euler le tableau du document 2.

Données utiles $A = 1{,}2\times10^{4}\ \mathrm{A\cdot s^{-1}}$; $B = 2{,}8\times10^{4}\ \mathrm{s^{-1}}$; $\Delta t = 1{,}0\times10^{-5}\ \mathrm{s}$

À chaque date : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = A - B\,i(t)$, puis $i(t+\Delta t) = i(t) + \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,\Delta t$.

- $t = 0$: à la fermeture de l'interrupteur, $i(0) = 0$, donc $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = A = 1{,}2\times10^{4}\ \mathrm{A\cdot s^{-1}}$.
- $t = 1{,}0\times10^{-5}\ \mathrm{s}$: $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 1{,}2\times10^{4} - 2{,}8\times10^{4}\times0{,}12 = 8{,}6\times10^{3}\ \mathrm{A\cdot s^{-1}}$.
- $t = 2{,}0\times10^{-5}\ \mathrm{s}$: $i = 0{,}12 + 8{,}6\times10^{3}\times1{,}0\times10^{-5} = 0{,}21\ \mathrm{A}$.

$i(0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) = 1{,}2\times10^{4}\ \mathrm{A\cdot s^{-1}}$; $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(1{,}0\times10^{-5}) = 8{,}6\times10^{3}\ \mathrm{A\cdot s^{-1}}$; $i(2{,}0\times10^{-5}) = 0{,}21\ \mathrm{A}$

PIÈGE
Utiliser la dérivée de la ligne en cours pour calculer i de cette même ligne. La méthode d'Euler avance toujours avec la pente de la ligne précédente.

COMPRENDRE
Vérifications : $0 + 1{,}2\times10^{4}\times1{,}0\times10^{-5} = 0{,}12$ A, valeur donnée ; et avec $i = 0{,}21$ A on retrouve $6{,}1\times10^{3}\ \mathrm{A\cdot s^{-1}}$, dernière case fournie par le sujet.

t (s)	$i(t)$ (A)	di/dt (A·s^{-1})
0	**0**	**$1{,}2 \times 10^4$**
$1{,}0 \times 10^{-5}$	0,12	**$8{,}6 \times 10^3$**
$2{,}0 \times 10^{-5}$	**0,21**	$6{,}1 \times 10^3$

11 · Document 2 complété (en orange, les valeurs calculées)

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1.2 \times 10^4 - 2.8 \times 10^4 \times 0.12 \approx 8640$

$0.12 + 8640 \times 1.0 \times 10^{-5} \approx 0.2064$

$1.2 \times 10^4 - 2.8 \times 10^4 \times 0.21 \approx 6120$

12 Comment Frédéric peut-il améliorer la précision de la méthode d'Euler ?

La méthode d'Euler suppose que la pente reste constante pendant chaque intervalle Δt ; l'approximation est d'autant meilleure que cet intervalle est court.

Il faut **diminuer le pas** Δt (par exemple $1{,}0 \times 10^{-6}$ s), au prix d'un plus grand nombre de lignes de calcul.

COMPRENDRE

Sur le graphe, les points d'Euler sont au-dessus de la courbe expérimentale : la pente du début d'intervalle est trop forte, car en réalité elle diminue sans cesse. Ici $\Delta t \approx \frac{\tau}{3{,}5}$, ce qui est un pas trop grand.

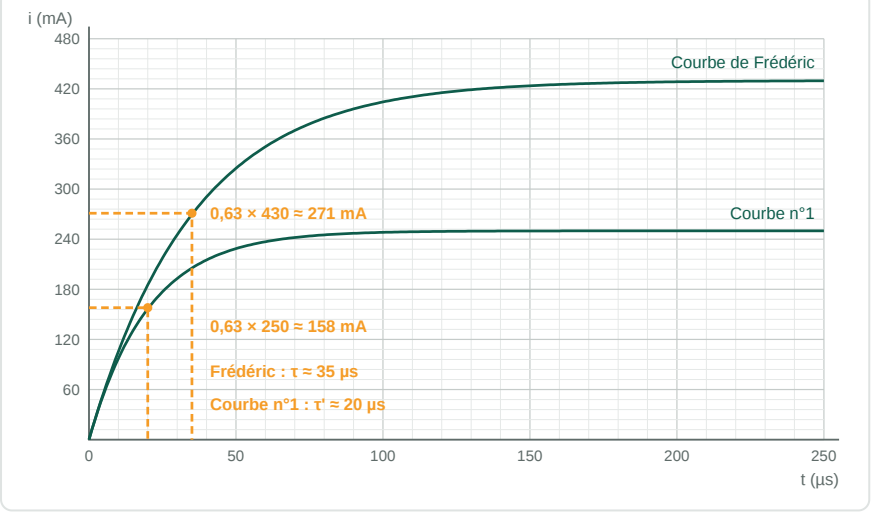
13 Quelle grandeur (E ou R) le professeur a-t-il modifiée pour obtenir la courbe n°1 du document 3 ? Justifier.

On détermine la constante de temps de chaque courbe par la lecture à 63 % de la valeur finale :

- courbe de Frédéric : $0{,}63 \times 430 = 271\ \text{mA}$, atteint à $\tau \approx 35\ \mu\text{s}$;
- courbe n°1 : palier à 250 mA, $0{,}63 \times 250 = 158\ \text{mA}$, atteint à $\tau' \approx 20\ \mu\text{s}$.

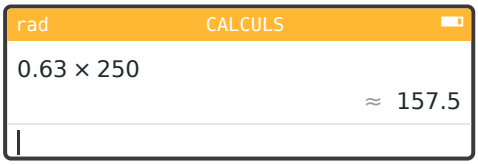
La constante de temps a changé. Or $\tau = \dfrac{L}{R+r}$ ne dépend pas de E, et L et r sont inchangées (même bobine).

Le professeur a modifié la **résistance** R ; comme $\tau' < \tau$, il l'a augmentée.



13 · Document 3 complété : constante de temps de chaque courbe

À LA CALCULATRICE



COMPRENDRE

Cohérence : le palier $\dfrac{E}{R+r}$ baisse aussi quand R augmente. Avec 250 mA, $R' = \dfrac{6{,}0}{0{,}250} - 4{,}0 = 20\ \Omega$, d'où $\tau' = \dfrac{4{,}9 \times 10^{-4}}{24} \approx 20\ \mu\text{s}$.

MÉTHODE

Autre argument : les deux courbes ont la même tangente à l'origine, de pente $A = \dfrac{E}{L}$. Si E avait changé, cette pente initiale serait différente.