Utilisation du technétium en médecine nucléaire

Bac S 2008 Amérique du Sud (ancien programme) · Exercice 2 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 À quelles conditions dit-on que deux noyaux sont isotopes ?

Deux noyaux sont isotopes s'ils ont le **même nombre de protons** Z (même élément chimique) mais des **nombres de neutrons différents**, donc des nombres de nucléons A différents.

COMPRENDRE
Exemple dans le sujet : $^{97}_{43}\mathrm{Tc}$ et $^{99}_{43}\mathrm{Tc}$ ont tous deux 43 protons, mais 54 et 56 neutrons.

1.2.1 Énoncer les lois de conservation qui régissent les réactions nucléaires.

Lors d'une réaction nucléaire, il y a :

- conservation du **nombre de charge** : la somme des Z est la même avant et après ;
- conservation du **nombre de nucléons** : la somme des A est la même avant et après.

Conservation du nombre de charge Z et du nombre de nucléons A (lois de Soddy).

PIÈGE
Écrire que la masse se conserve. Elle varie légèrement, et c'est cette variation qui correspond à l'énergie libérée (question 2.2).

1.2.2 Écrire l'équation de la réaction nucléaire de synthèse du technétium 97, sachant qu'une particule $^{A}_{Z}\mathrm{X}$ est émise. Nommer cette particule.

Données utiles $^{96}_{42}\mathrm{Mo}$; $^{2}_{1}\mathrm{H}$; $^{97}_{43}\mathrm{Tc}$

Le molybdène 96 est bombardé par du deutérium :
$^{96}_{42}\mathrm{Mo} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{97}_{43}\mathrm{Tc} + {}^{A}_{Z}\mathrm{X}$

Nombre de nucléons : $96 + 2 = 97 + A$, donc $A = 1$.

Nombre de charge : $42 + 1 = 43 + Z$, donc $Z = 0$.

Une particule formée d'un seul nucléon, sans charge, est un neutron.

$^{96}_{42}\mathrm{Mo} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{97}_{43}\mathrm{Tc} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$: la particule émise est un **neutron**.

MÉTHODE
Poser l'équation avec les inconnues A et Z, écrire une égalité par loi de conservation, puis identifier la particule : $Z = 0$ et $A = 1$ pour le neutron, $Z = 1$ et $A = 1$ pour le proton.

2.1 Écrire l'équation de la désintégration du molybdène 99. De quel type de radioactivité s'agit-il ?

Données utiles $^{99}_{42}\mathrm{Mo}$; $^{99}_{43}\mathrm{Tc}$

Le noyau père $^{99}_{42}\mathrm{Mo}$ donne le noyau fils $^{99}_{43}\mathrm{Tc}$ et une particule $^{A}_{Z}\mathrm{X}$.

Conservations : $99 = 99 + A$ donc $A = 0$; $42 = 43 + Z$ donc $Z = -1$.

La particule est un électron $^{0}_{-1}\mathrm{e}$.

$^{99}_{42}\mathrm{Mo} \longrightarrow {}^{99}_{43}\mathrm{Tc} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$: un électron est émis, c'est une radioactivité β^{-}.

COMPRENDRE
A ne change pas et Z augmente de 1 : dans le noyau, un neutron s'est transformé en proton, avec émission d'un électron.

2.2 Calculer, en joules et en MeV, l'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau de molybdène 99.

Données utiles $m(\text{Mo}) = 98{,}88437$ u ; $m(\text{Tc}) = 98{,}88235$ u ; $m(\text{e}) = 0{,}00055$ u ; $1\text{ u} = 1{,}66054 \times 10^{-27}$ kg ; $c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $1\text{ eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}$ J

Variation de masse au cours de la désintégration :

$\Delta m = m(\text{Tc}) + m(\text{e}) - m(\text{Mo}) = 98{,}88235 + 0{,}00055 - 98{,}88437 = -0{,}00147$ u

La masse diminue : de l'énergie est libérée, $E_{\text{lib}} = |\Delta m|\, c^2$.

$$E_{\text{lib}} = 0{,}00147 \times 1{,}66054 \times 10^{-27} \times (3{,}00 \times 10^{8})^2 = 2{,}20 \times 10^{-13}\ \text{J}$$

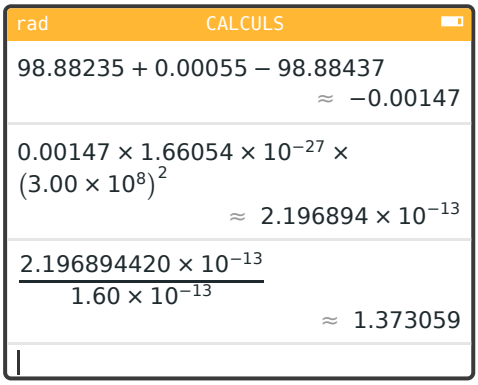
Conversion : $1\text{ MeV} = 1{,}60 \times 10^{-13}$ J, donc $E_{\text{lib}} = \dfrac{2{,}20 \times 10^{-13}}{1{,}60 \times 10^{-13}} = 1{,}37\text{ MeV}$

$\boxed{E_{\text{lib}} = 2{,}20 \times 10^{-13}\ \text{J} = 1{,}37\text{ MeV}}$

PIÈGE
Laisser la masse en u dans $E = m\,c^2$: il faut des kilogrammes pour obtenir des joules. Ne pas oublier non plus la masse de l'électron dans les produits.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs : $|\Delta m| = 0{,}00147$ u et c en comptent trois. Vérification avec $1\text{ u} \leftrightarrow 931{,}5$ MeV : $0{,}00147 \times 931{,}5 = 1{,}37$ MeV.

À LA CALCULATRICE



3.1 Définir le terme « temps de demi-vie ».

Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle la **moitié des noyaux radioactifs** initialement présents dans l'échantillon se sont désintégrés : $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$.

COMPRENDRE
L'activité est elle aussi divisée par deux à chaque demi-vie : pour le technétium 99, elle est divisée par 4 en 12 h et par 16 en 24 h.

3.2 Montrer que l'expression de l'activité peut se mettre sous la forme $A(t) = A_0\, \text{e}^{-\lambda t}$.

Données utiles $N(t) = N_0\, \text{e}^{-\lambda t}$; $A(t) = \left|\dfrac{\text{d}N(t)}{\text{d}t}\right|$

On dérive $N(t)$ par rapport au temps : $\dfrac{\text{d}N}{\text{d}t} = -\lambda\, N_0\, \text{e}^{-\lambda t}$

Cette dérivée est négative (λ et N_0 sont positifs), donc en valeur absolue :

$$A(t) = \left|\frac{\text{d}N}{\text{d}t}\right| = \lambda\, N_0\, \text{e}^{-\lambda t}$$

En posant $A_0 = \lambda\, N_0$, activité à l'instant $t = 0$:

$\boxed{A(t) = A_0\, \text{e}^{-\lambda t} \text{ avec } A_0 = \lambda\, N_0}$

COMPRENDRE
On retient $A(t) = \lambda\, N(t)$: l'activité est proportionnelle au nombre de noyaux encore présents, elle décroît donc avec la même demi-vie.

3.3 Calculer le nombre de noyaux de technétium 99 reçus par le patient lors de l'injection.

Données utiles $A_0 = 555$ MBq ; $t_{1/2} = 6{,}0$ h ; $A_0 = \lambda N_0$ (3.2) ; $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

À l'injection, $A_0 = \lambda N_0$ avec $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$, donc $N_0 = \dfrac{A_0}{\lambda} = \dfrac{A_0\, t_{1/2}}{\ln 2}$.

Unités : $A_0 = 555 \times 10^6$ Bq et $t_{1/2} = 6{,}0 \times 3600 = 2{,}16 \times 10^4$ s.

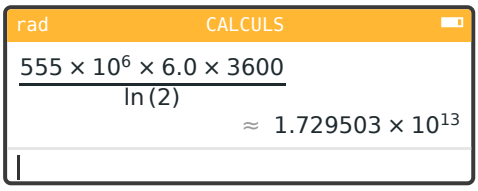
$$N_0 = \frac{555 \times 10^6 \times 6{,}0 \times 3600}{\ln 2} = 1{,}7 \times 10^{13}$$

$N_0 = 1{,}7 \times 10^{13}$ noyaux de technétium 99

PIÈGE
Garder $t_{1/2}$ en heures. Le becquerel est une désintégration par seconde : la demi-vie doit être en secondes, sinon le résultat est 3600 fois trop petit.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement, comme $t_{1/2} = 6{,}0$ h, la donnée la moins précise.

À LA CALCULATRICE



3.4 À la fin de l'examen, l'activité du patient vaut 63 % de sa valeur à 14 h, juste après l'injection. À quelle heure se termine l'examen ?

Données utiles $A(t) = A_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$ (3.2) ; $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$; $t_{1/2} = 6{,}0$ h

On choisit $t = 0$ à 14 h. On cherche t tel que $A(t) = 0{,}63\, A_0$:

$A_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0{,}63\, A_0$, soit $\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0{,}63$, donc $-\lambda t = \ln(0{,}63)$.

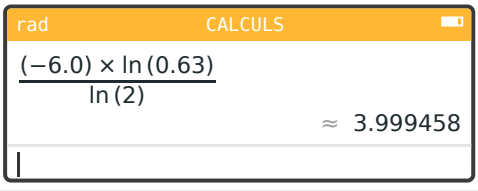
$$t = -\frac{\ln(0{,}63)}{\lambda} = -\frac{t_{1/2}\, \ln(0{,}63)}{\ln 2} = -\frac{6{,}0 \times \ln(0{,}63)}{\ln 2} = 4{,}0 \text{ h}$$

L'examen dure 4,0 h : il se termine le mardi à **18 h**.

COMPRENDRE
Contrôle de vraisemblance : 63 % est supérieur à 50 %, donc la durée doit être inférieure à une demi-vie (6,0 h). C'est bien le cas.

MÉTHODE
Pour isoler t dans une exponentielle : simplifier par A_0, prendre le logarithme népérien des deux membres, puis diviser. En gardant $t_{1/2}$ en heures, t sort directement en heures.

À LA CALCULATRICE



3.5 À l'aide du graphe, déterminer la couche de demi-atténuation du plomb pour le rayonnement gamma produit par le technétium 99.

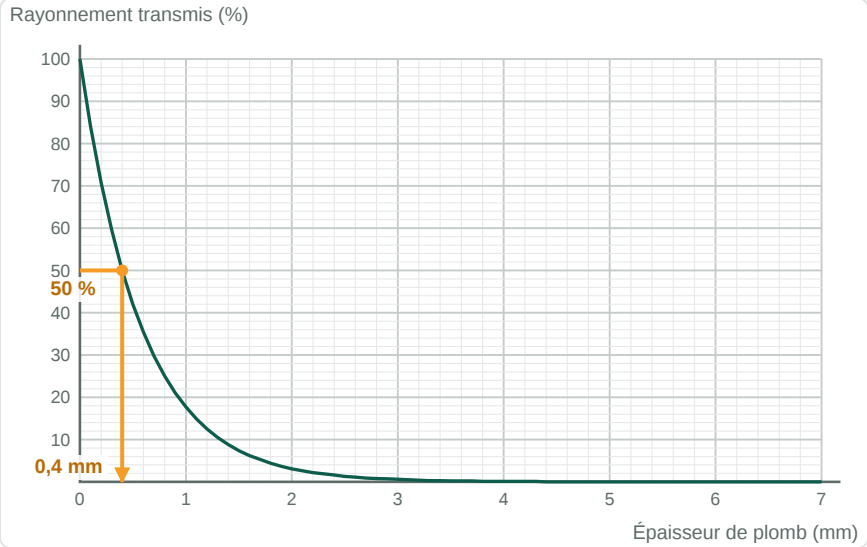
La couche de demi-atténuation est l'épaisseur qui arrête 50 % du rayonnement : il en reste donc 50 % de transmis.

Sur le graphe, on trace l'horizontale d'ordonnée 50 % jusqu'à la courbe, puis on descend verticalement jusqu'à l'axe des abscisses.

Couche de demi-atténuation du plomb : environ $0{,}4$ mm.

PIÈGE
Lire l'échelle horizontale trop vite : 1 mm correspond à plusieurs carreaux, et la lecture se fait entre 0 et 0,5 mm. Un seul chiffre significatif suffit pour une lecture graphique aussi fine.

COMPRENDRE
Chaque couche de 0,4 mm divise le rayonnement transmis par deux. Les 5 mm du protège-seringue en représentent plus de douze : le rayonnement transmis est pratiquement nul, comme le montre la courbe au-delà de 4 mm.



3.5 · Graphe du sujet, avec la lecture à 50 %