Détermination de la viscosité du glycérol

Bac S 2008 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Donner l'expression vectorielle du poids $\vec{P}$ de la bille en fonction de ρ_s, V, g et $\vec{j}$.

Masse de la bille : $m = \rho_s V$. Le poids est vertical, vers le bas, donc dans le sens de $\vec{j}$:

$$\vec{P} = m\,g\,\vec{j} = \rho_s V g\,\vec{j}$$

PIÈGE
L'axe $y'y$ est orienté vers le bas : le poids est selon $+\vec{j}$, sans signe moins.

1.2 Donner l'expression vectorielle de la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$ en fonction de ρ_{gly}, V, g et $\vec{j}$.

La poussée d'Archimède est l'opposé du poids du glycérol déplacé, de masse $\rho_{gly} V$. Elle est verticale, vers le haut :

$$\vec{F}_A = -\rho_{gly} V g\,\vec{j}$$

PIÈGE
La masse volumique à utiliser est celle du fluide (ρ_{gly}), pas celle de l'acier ; le volume est celui de la bille, entièrement immergée.

1.3 La force de frottement a pour intensité $f = k\eta R v$ (loi de Stokes). Donner son expression vectorielle.

Le frottement s'oppose au mouvement. La bille descend : $\vec{v} = v\,\vec{j}$, donc $\vec{f}$ est dirigée vers le haut.

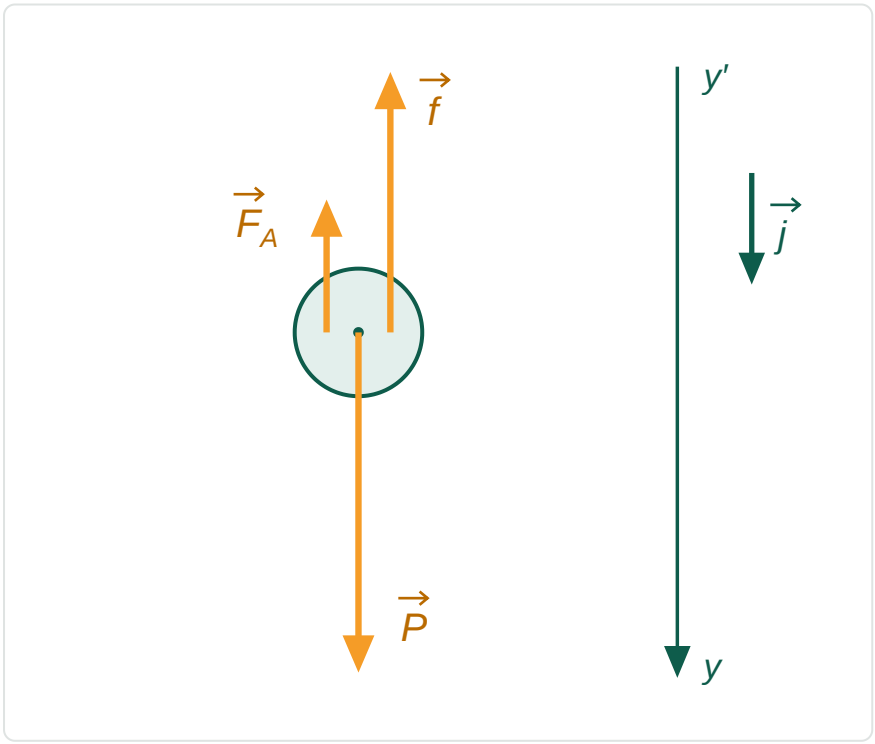
$$\vec{f} = -k\eta R\,\vec{v} = -k\eta R v\,\vec{j}$$

1.4 Représenter ces forces sur un schéma, sans souci d'échelle.

Les trois forces sont verticales et tracées à partir du centre de la bille (les deux flèches vers le haut sont légèrement décalées pour la lisibilité).

$\vec{P}$ vers le bas ; $\vec{F}_A$ et $\vec{f}$ vers le haut.

COMPRENDRE
Sans échelle imposée, seuls la direction, le sens et le point d'application comptent. Un schéma cohérent montre tout de même P plus grand que F_A, puisque l'acier est plus dense que le glycérol.



1.4 · Forces exercées sur la bille pendant la chute

2.1 Exprimer la vitesse limite v_{lim} en fonction de Δt_{ch} et L.

Entre D et F la vitesse est constante : la bille parcourt la distance L pendant la durée Δt_{ch}.

$$v_{lim} = \frac{L}{\Delta t_{ch}}$$

2.2 Écrire, en la justifiant, la relation vectorielle entre les forces exercées sur la bille entre les traits D et F.

Entre D et F, la bille a un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel du laboratoire, galiléen. D'après le principe d'inertie (première loi de Newton), les forces qu'elle subit se compensent :

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = \vec{0}$$

PIÈGE
La justification attendue tient en trois mots-clés : mouvement rectiligne uniforme, référentiel galiléen, principe d'inertie. Écrire la relation seule ne rapporte qu'une partie des points.

2.3 En déduire l'expression $\eta = C(\rho_s - \rho_{gly})\,\Delta t_{ch}$ avec $C = \dfrac{gV}{kRL}$.

Avec les expressions de la partie 1, pour $v = v_{lim}$:

$\rho_s V g\,\vec{j} - \rho_{gly} V g\,\vec{j} - k\eta R\, v_{lim}\,\vec{j} = \vec{0}$

En projection sur l'axe $y'y$: $\quad k\eta R\, v_{lim} = (\rho_s - \rho_{gly})\, V g$

Or $v_{lim} = \dfrac{L}{\Delta t_{ch}}$ (2.1), donc $k\eta R \dfrac{L}{\Delta t_{ch}} = (\rho_s - \rho_{gly})\, V g$, soit

$$\eta = \frac{gV}{kRL}\,(\rho_s - \rho_{gly})\,\Delta t_{ch}$$

$\eta = C(\rho_s - \rho_{gly})\,\Delta t_{ch}$ avec $C = \dfrac{gV}{kRL}$: c'est l'expression attendue.

MÉTHODE
Viscosimètre à chute de bille : 1) forces qui se compensent à vitesse limite ; 2) projection sur l'axe vertical ; 3) remplacement de v_{lim} par $L/\Delta t_{ch}$. Une simple mesure de durée donne alors η.

2.4 Calculer la valeur de la viscosité η.

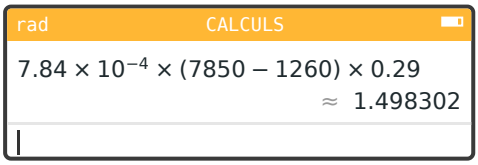
Données utiles $C = 7{,}84 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$; $\Delta t_{ch} = 0{,}29\ \text{s}$; $\rho_s = 7850\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $\rho_{gly} = 1260\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

$$\eta = C(\rho_s - \rho_{gly})\,\Delta t_{ch}$$
$$\eta = 7{,}84 \times 10^{-4} \times (7850 - 1260) \times 0{,}29$$

$$\eta = 1{,}5\ \text{Pa} \cdot \text{s}$$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme $\Delta t_{ch} = 0{,}29$ s, la donnée la moins précise. Unité : $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \times \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, c'est-à-dire le $\text{Pa} \cdot \text{s}$.

À LA CALCULATRICE



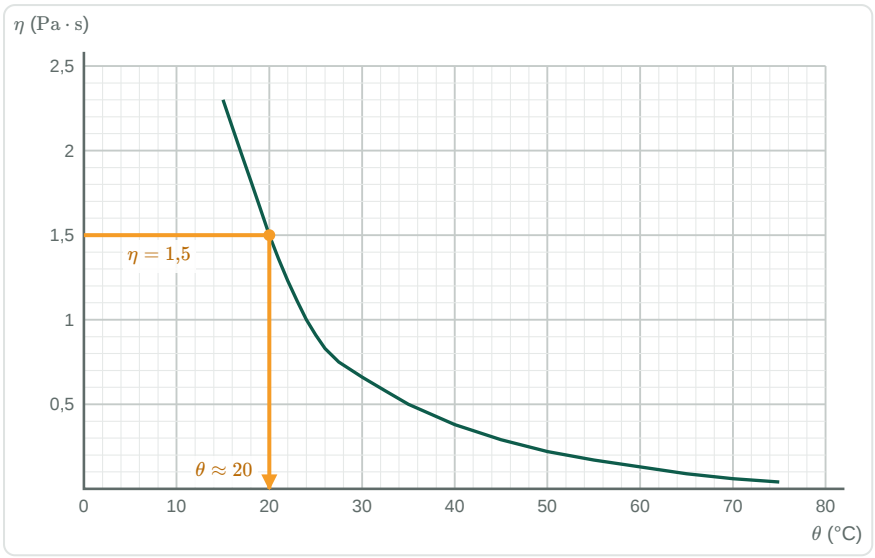
2.5 Déterminer graphiquement, sur la courbe de l'annexe, la température à laquelle l'expérience a été réalisée.

Données utiles $\eta = 1{,}5\ \text{Pa} \cdot \text{s}$ (2.4)

Sur la courbe de l'annexe, on trace l'horizontale d'ordonnée $\eta = 1{,}5\ \text{Pa} \cdot \text{s}$ jusqu'à la courbe, puis on descend verticalement jusqu'à l'axe des températures.

$$\theta \approx 20\ ^\circ\text{C}$$

COMPRENDRE
La viscosité du glycérol chute très vite quand la température augmente : entre 20 °C et 30 °C elle est divisée par plus de deux. La température doit donc rester stable pendant la mesure.



2.5 · Annexe complétée : lecture de la température pour $\eta = 1{,}5\ \text{Pa} \cdot \text{s}$

3.1.1 Identifier graphiquement les deux phases d'évolution de la vitesse et les nommer.

- De $t = 0$ à $t \approx 0{,}20$ s : la vitesse augmente, de moins en moins vite. C'est le **régime transitoire**.
- Au-delà : la vitesse garde une valeur constante, $v = v_{lim}$. C'est le **régime permanent**.

Régime transitoire (v croissante), puis régime permanent ($v = v_{lim}$ constante).

PIÈGE
L'annexe parle de « chute libre », mais ce n'en est pas une : la bille subit aussi la poussée d'Archimède et le frottement. En chute libre, v augmenterait indéfiniment.

3.1.2 Déterminer graphiquement le temps caractéristique τ et la valeur de la vitesse limite v_{lim}.

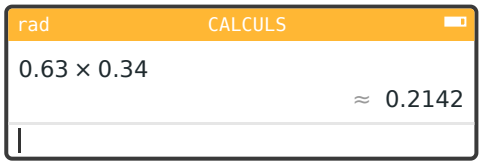
- v_{lim} est l'ordonnée de l'asymptote horizontale de la courbe, située juste sous la graduation 0,35 : $v_{lim} \approx 0{,}34\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- τ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine avec cette asymptote : $\tau \approx 0{,}04$ s.

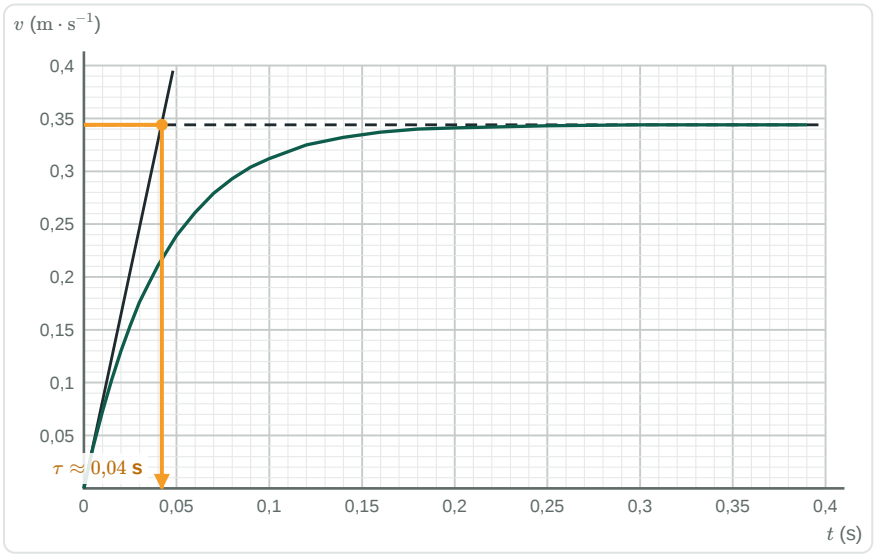
$v_{lim} \approx 0{,}34\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\tau \approx 0{,}04$ s

COMPRENDRE
Le tracé d'une tangente à l'origine est peu précis : toute valeur de τ comprise entre 0,04 s et 0,05 s est acceptable, à condition que la construction figure sur l'annexe.

MÉTHODE
Vérification de τ sans tangente : c'est la date où v atteint 63 % de v_{lim}, soit ici $0{,}21\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. La courbe y passe vers 0,04 s.

À LA CALCULATRICE





3.1.2 · Annexe complétée : asymptote, tangente à l'origine, lecture de v_{lim} et de τ

3.1.3 Comment le graphe $v = f(t)$ permet-il d'étudier l'évolution de l'accélération au cours du temps ? Décrire cette évolution.

L'accélération est la dérivée de la vitesse : $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. À chaque date, elle est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe $v = f(t)$.

- Régime transitoire : la tangente est de moins en moins inclinée, donc l'accélération diminue à partir de sa valeur maximale à $t = 0$.
- Régime permanent : la tangente est horizontale, l'accélération est nulle.

a est la pente de la tangente à la courbe : maximale à $t = 0$, elle décroît puis s'annule quand $v = v_{lim}$.

PIÈGE
Ne pas confondre « l'accélération diminue » et « la bille ralentit ». Tant que a est positive, la vitesse continue d'augmenter, simplement de moins en moins vite.

3.2.1 Par application de la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle vérifiée par v et l'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A + B\,v$.

Système {bille}, de masse $m = \rho_s V$; référentiel du laboratoire supposé galiléen ; forces : $\vec{P}$, $\vec{F}_A$, $\vec{f}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m\,\vec{a}$

En projection sur l'axe $y'y$, avec $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$:

$$\rho_s V g - \rho_{gly} V g - k\eta R\,v = \rho_s V \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

On divise par $\rho_s V$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - \frac{\rho_{gly}}{\rho_s}\right) - \frac{k\eta R}{\rho_s V}\,v, \text{ soit } A = g\left(1 - \frac{\rho_{gly}}{\rho_s}\right) \text{ et } B = -\frac{k\eta R}{\rho_s V}$$

PIÈGE
La masse du second membre est celle de la bille, $\rho_s V$, et non celle du glycérol déplacé. Le signe moins fait partie de B : B est négatif.

COMPRENDRE
En régime permanent, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ donne $v_{lim} = -\dfrac{A}{B}$: on retrouve la relation de la question 2.3.

3.2.2 Calculer A et préciser son unité.

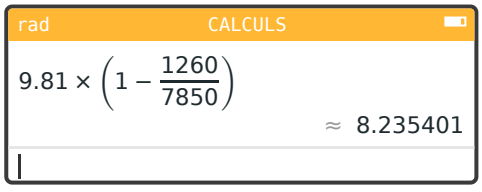
Données utiles $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $\rho_s = 7850\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; $\rho_{gly} = 1260\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

$$A = g\left(1 - \frac{\rho_{gly}}{\rho_s}\right) = 9{,}81 \times \left(1 - \frac{1260}{7850}\right)$$

Le rapport des masses volumiques est sans unité : A a l'unité de g, celle d'une accélération.

$$A = 8{,}24\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

À LA CALCULATRICE



3.2.3 En déduire la valeur de l'accélération a_0 de la bille à l'instant $t = 0$.

Données utiles $A = 8{,}24\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ (3.2.2)

À $t = 0$ la bille est lâchée sans vitesse initiale : $v(0) = 0$. L'équation différentielle donne alors

$$a_0 = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = A + B \times 0 = A$$

$$\boxed{a_0 = A = 8{,}24\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

COMPRENDRE

a_0 est inférieure à g : la poussée d'Archimède agit dès le départ. C'est aussi la pente de la tangente à l'origine : $\tau = \frac{v_{lim}}{a_0} \approx 0{,}041$ s, en accord avec la lecture de 3.1.2.

À LA CALCULATRICE

