Le hockey sur gazon

Bac S 2009 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 1 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Partie A (première phase). Énoncer la deuxième loi de Newton et l'appliquer à la balle lors de son trajet entre A et B.

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système de masse m constante est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G$.

Système {balle}, référentiel terrestre supposé galiléen. Le poids et les actions de l'air étant négligés, la seule force est $\vec{F}$, exercée par la crosse.

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_G$$

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, puis la loi. Un énoncé de loi sans la mention « référentiel galiléen » est incomplet.

1.2 Partie A. Que peut-on dire de la nature du mouvement de la balle entre A et B ?

D'après 1.1, $\vec{a}_G = \dfrac{\vec{F}}{m}$. La force $\vec{F}$ est constante et m aussi : le vecteur accélération est constant.

La balle part de A sans vitesse et $\vec{a}_G$ garde la direction de (AB) : la trajectoire est le segment AB et la vitesse augmente régulièrement.

Le mouvement de la balle est **rectiligne uniformément accéléré**.

PIÈGE
Répondre seulement « rectiligne » ou seulement « accéléré ». La nature d'un mouvement comporte deux mots : la forme de la trajectoire et l'évolution de la vitesse.

2.1 Partie A. Donner l'expression du vecteur accélération en fonction du vecteur vitesse.

Par définition, $\vec{a}_G = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$.

Ici $\vec{a}_G$ est constant, donc il est égal à la variation de vitesse divisée par la durée : $\vec{a}_G = \dfrac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{\Delta t}$, avec $\vec{v}_A = \vec{0}$.

$$\vec{a}_G = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{v}_B}{\Delta t}$$

2.2 Partie A. Calculer la valeur de l'accélération du centre d'inertie de la balle entre les points A et B.

Données utiles $v_B = 14\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $\Delta t = 0{,}11\ \mathrm{s}$

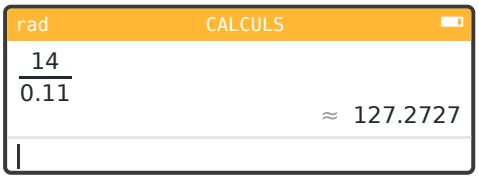
D'après 2.1, en valeur : $a_G = \dfrac{v_B}{\Delta t}$

$$a_G = \frac{14}{0{,}11} = 127\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a_G = 1{,}3 \times 10^2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

COMPRENDRE
Les données $(14\ ;\ 0{,}11)$ ont deux chiffres significatifs : le résultat en garde deux, d'où l'écriture $1{,}3 \times 10^2$. On conserve la valeur non arrondie pour le calcul suivant.

À LA CALCULATRICE



3 Partie A. À l'aide des résultats de 1.1 et 2.2, calculer l'intensité de la force exercée sur la balle par la crosse. L'hypothèse concernant le poids de la balle est-elle justifiée ?

Données utiles $m = 160\ \text{g} = 0{,}160\ \text{kg}$; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $a_G = 127\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (2.2)

D'après 1.1, en valeur : $F = m\,a_G = 0{,}160 \times 127 = 20$ N.

Poids de la balle : $P = m\,g = 0{,}160 \times 9{,}8 = 1{,}6$ N.

Comparaison : $\dfrac{F}{P} = \dfrac{a_G}{g} = \dfrac{127}{9{,}8} \approx 13$.

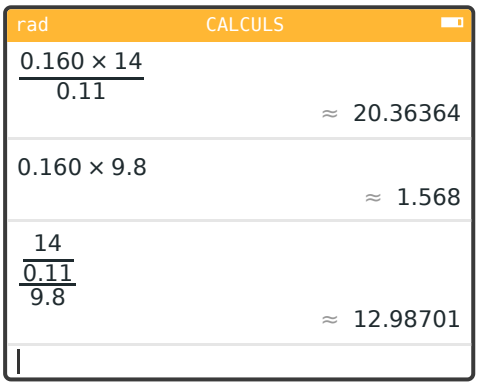
Le poids est 13 fois plus petit que F : il représente environ 8 % de cette force. Une force est habituellement négligée quand elle est au moins cent fois plus faible que l'autre.

$F = 20$ N et $P = 1{,}6$ N : $F \approx 13\,P$. L'hypothèse n'est pas vraiment justifiée, elle n'est acceptable qu'en première approximation.

PIÈGE
Laisser la masse en grammes : 160×127 donnerait une force mille fois trop grande. Dans $F = m\,a$, la masse est en kilogrammes.

MÉTHODE
Pour juger une hypothèse « on néglige… », calculer le rapport des deux grandeurs et conclure avec ce nombre, pas avec une impression.

À LA CALCULATRICE



1.1 Partie B (deuxième phase). Donner l'expression des coordonnées v_{Bx} et v_{Bz} du vecteur vitesse $\vec{v}_B$ à l'instant $t = 0$, en fonction de v_B et de α.

Le vecteur $\vec{v}_B$ fait l'angle α avec l'axe horizontal Ox et pointe vers le haut.

$v_{Bx} = v_B \cos\alpha$ et $v_{Bz} = v_B \sin\alpha$

MÉTHODE
Le cosinus va sur l'axe qui borde l'angle (ici Ox), le sinus sur l'autre. Les deux coordonnées sont positives car la balle part vers la droite et vers le haut.

1.2 Partie B. Donner l'expression des coordonnées x_B et z_B du vecteur $\overrightarrow{OB}$ au point B.

Le point B est à la verticale de l'origine O, à la hauteur $OB = h$.

$x_B = 0$ et $z_B = h$

1.3 Partie B. À partir des équations horaires de la vitesse, montrer que la valeur de la vitesse de la balle au sommet S de la trajectoire est $v_S = 12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Données utiles $v_x = v_B\cos\alpha$; $v_z = v_B\sin\alpha - g\,t$; $v_B = 14\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 30^\circ$

Au sommet S, la balle cesse de monter : le vecteur vitesse est horizontal, donc $v_{Sz} = 0$.

La coordonnée horizontale $v_x = v_B\cos\alpha$ ne dépend pas du temps : $v_{Sx} = v_B\cos\alpha$.

$$v_S = \sqrt{v_{Sx}^2 + v_{Sz}^2} = v_B\cos\alpha$$

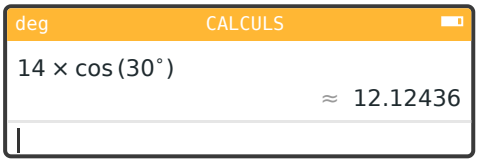
$$v_S = 14 \times \cos 30^\circ = 12{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v_S = v_B\cos\alpha = 12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ avec deux chiffres significatifs : c'est la valeur attendue.

PIÈGE
Écrire que la vitesse est nulle au sommet. Seule la coordonnée verticale s'annule ; la balle continue d'avancer horizontalement.

PIÈGE
Calculatrice réglée en radians : $14 \times \cos(30)$ afficherait 2,16. Vérifier le mode degrés.

À LA CALCULATRICE



1.4 Partie B. Montrer que les coordonnées du vecteur position sont $x = (v_B\cos\alpha)\,t$ et $z = h + (v_B\sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}g\,t^2$.

Par définition, $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$: les coordonnées de position sont des primitives de celles de la vitesse.

$$x(t) = (v_B\cos\alpha)\,t + C_1 \qquad z(t) = (v_B\sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 + C_2$$

Conditions initiales : à $t = 0$, G est en B, donc $x(0) = x_B = 0$ et $z(0) = z_B = h$ (1.2). On en tire $C_1 = 0$ et $C_2 = h$.

$x = (v_B\cos\alpha)\,t$ et $z = h + (v_B\sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}g\,t^2$

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration, ou les poser nulles sans justification. Ici $C_2 = h$: la balle ne part pas de l'origine.

1.5 Partie B. En déduire l'équation de la trajectoire de la balle.

On élimine le temps. D'après l'expression de x : $t = \dfrac{x}{v_B\cos\alpha}$.

On reporte dans z :

$$z = h + v_B\sin\alpha \times \frac{x}{v_B\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_B\cos\alpha}\right)^2$$

$z = -\dfrac{g}{2\,v_B^2\cos^2\alpha}\,x^2 + (\tan\alpha)\,x + h$: la trajectoire est une portion de parabole.

COMPRENDRE
Le coefficient de x^2 est négatif : la parabole est tournée vers le bas, ce qui correspond bien à une balle qui monte puis redescend.

2.1 Partie B. Quelles conditions doivent satisfaire x et z pour que le but soit marqué ?

Données utiles $d = 15$ m ; $L = 2{,}14$ m

La balle doit franchir la ligne de but en passant sous la barre, sans avoir touché le sol avant.

Pour $x = d$, il faut $0 \leqslant z \leqslant L$.

2.2 Partie B. Vérifier que ces conditions sont bien réalisées.

Données utiles $d = 15$ m ; $L = 2{,}14$ m ; $h = 0{,}40$ m ; $v_B = 14$ m · s^{-1} ; $\alpha = 30^\circ$; $g = 9{,}8$ m · s^{-2}

On calcule l'altitude de la balle pour $x = d$ avec l'équation de la trajectoire (1.5) :

$$z(d) = h + d\tan\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{d}{v_B\cos\alpha}\right)^2$$

$$z(d) = 0{,}40 + 15 \times \tan 30^\circ - \frac{9{,}8}{2} \times \left(\frac{15}{14 \times \cos 30^\circ}\right)^2 = 1{,}6 \text{ m}$$

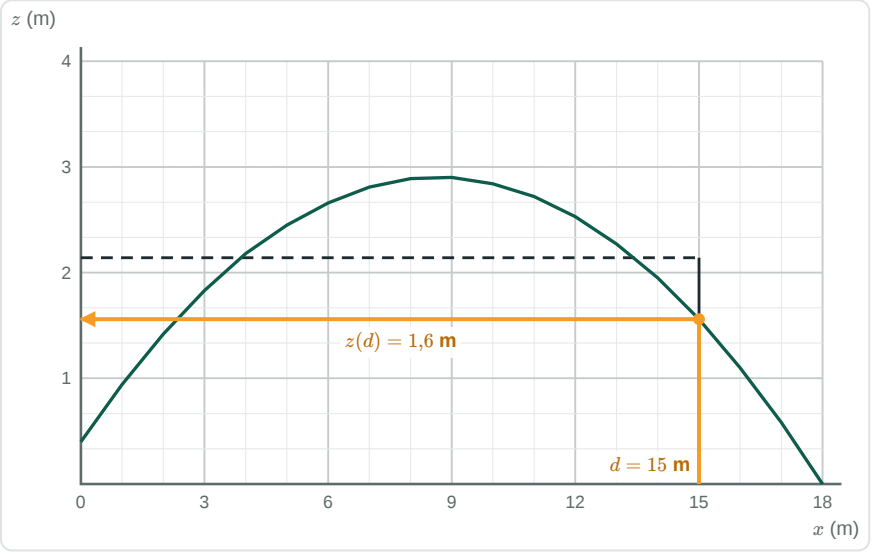
$z(d) = 1{,}6$ m, donc $0 \leqslant z(d) \leqslant 2{,}14$ m : le but est marqué.

PIÈGE
Utiliser $v_S = 12$ m · s^{-1} arrondi à la place de $v_B\cos\alpha$: on trouve $1{,}4$ m. La conclusion reste la même, mais la valeur est moins précise.

À LA CALCULATRICE

deg CALCULS

$0.40 + 15 \times \tan(30°) - \frac{9.8}{2} \times \left(\frac{15}{14 \times \cos(30°)}\right)^2 \approx 1.560254$



2.2 · Trajectoire de la balle et passage dans le but

1 Partie C (étude énergétique). Donner l'expression littérale de l'énergie potentielle de pesanteur E_P puis celle de l'énergie mécanique E_M de la balle en fonction de g, m, v et z.

L'axe Oz est orienté vers le haut et $E_P = 0$ pour $z = 0$: $E_P = m\,g\,z$.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle : $E_M = E_C + E_P$.

$E_P = m\,g\,z$ et $E_M = \frac{1}{2}m\,v^2 + m\,g\,z$

2 Partie C. Calculer l'énergie mécanique $E_M(B)$ de la balle au point B.

Données utiles $m = 0{,}160$ kg ; $v_B = 14$ m · s^{-1} ; $h = 0{,}40$ m ; $g = 9{,}8$ m · s^{-2}

Au point B, $v = v_B$ et $z = h$:

$$E_M(B) = \frac{1}{2}m\,v_B^2 + m\,g\,h = \frac{1}{2} \times 0{,}160 \times 14^2 + 0{,}160 \times 9{,}8 \times 0{,}40$$

$E_M(B) = 15{,}7 + 0{,}63 = 16{,}3$ J

$E_M(B) = 16$ J

PIÈGE
Oublier le carré de la vitesse, ou garder la masse en grammes. L'énergie n'est en joules que si m est en kg, v en m · s^{-1} et z en m.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$0.5 \times 0.160 \times 14^2 + 0.160 \times 9.8 \times 0.40 \approx 16.3072$

3.1 Partie C. Les actions de l'air étant négligées, que peut-on dire de la valeur de l'énergie mécanique E_M de la balle au cours de son mouvement ?

Après B, la balle n'est soumise qu'à son poids, qui est une force conservative : aucune force ne dissipe d'énergie.

L'énergie mécanique se conserve : $E_M = E_M(B) = 16$ J tout au long du mouvement.

3.2 Partie C. Exprimer l'altitude maximale z_{max} que pourrait atteindre la balle au point S, en fonction de E_M, v_S, m et g. Calculer la valeur de z_{max}.

Données utiles $E_M = 16{,}3$ J (question 2, valeur non arrondie) ; $v_S = 12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $m = 0{,}160$ kg ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

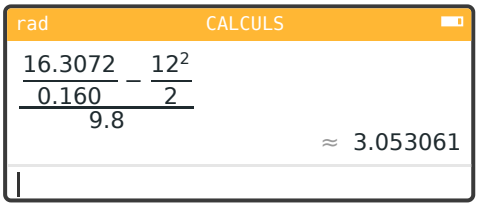
Au sommet S : $E_M = \frac{1}{2} m v_S^2 + m g z_{max}$, donc $m g z_{max} = E_M - \frac{1}{2} m v_S^2$.

$$z_{max} = \frac{1}{g}\left(\frac{E_M}{m} - \frac{v_S^2}{2}\right)$$

$$z_{max} = \frac{1}{9{,}8} \times \left(\frac{16{,}3}{0{,}160} - \frac{12^2}{2}\right) = 3{,}1\ \text{m}$$

$$\boxed{z_{max} = \frac{1}{g}\left(\frac{E_M}{m} - \frac{v_S^2}{2}\right) = 3{,}1\ \text{m}}$$

À LA CALCULATRICE



COMPRENDRE

Le résultat vient d'une différence de deux nombres proches (102 et 72) : il est très sensible aux arrondis. Avec $E_M = 16$ J on obtient 2,9 m, et avec $v_S = 12{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ aussi.