Un toboggan de plage

Bac S 2009 Antilles-Guyane (ancien programme) · Exercice 1 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{ppD} de l'enfant au point D.

Données utiles référence : $E_{ppO} = 0$ pour $y_O = 0$; D est à la hauteur h au-dessus de O

L'axe (Oy) est vertical, orienté vers le haut, et l'énergie potentielle est nulle en O : $E_{pp} = m\,g\,y$.

Le point D a pour ordonnée $y_D = h$.

$$\boxed{E_{ppD} = m\,g\,h}$$

PIÈGE
Écrire $m\,g\,(h + H)$: la référence est prise au point O, pas à la surface de l'eau.

1.2 Donner l'expression de l'énergie mécanique E_{mD} de l'enfant au point D.

$$E_{mD} = E_{cD} + E_{ppD} = \frac{1}{2}\,m\,v_D^2 + m\,g\,h$$

L'enfant part de D sans vitesse initiale : $v_D = 0$, donc $E_{cD} = 0$.

$$\boxed{E_{mD} = m\,g\,h}$$

1.3 Donner l'expression de l'énergie mécanique E_{mO} de l'enfant au point O.

$$E_{mO} = E_{cO} + E_{ppO} = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,y_O$$

Or $y_O = 0$, donc $E_{ppO} = 0$.

$$\boxed{E_{mO} = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2}$$

1.4 En déduire l'expression de la vitesse v_0 en justifiant le raisonnement.

Les frottements et les actions de l'air sont négligés. L'enfant est soumis à son poids, force conservative, et à la réaction de la piste, perpendiculaire au déplacement, qui ne travaille pas. L'énergie mécanique se conserve donc entre D et O :

$$E_{mD} = E_{mO} \quad \Longrightarrow \quad m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 \quad \Longrightarrow \quad v_0^2 = 2\,g\,h$$

Une valeur de vitesse est positive :

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2\,g\,h}}$$

PIÈGE
La justification est demandée : sans la phrase « pas de frottement, donc l'énergie mécanique se conserve », l'égalité $E_{mD} = E_{mO}$ n'est pas établie.

COMPRENDRE
La masse se simplifie : sans frottement, la vitesse en bas ne dépend ni de la masse de l'enfant ni de la forme de la piste, seulement de la dénivellation h.

1.5 Calculer la valeur de la vitesse v_0 de l'enfant en O.

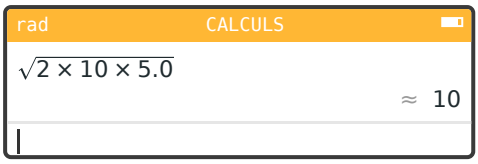
Données utiles $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $h = 5{,}0\ \text{m}$; $v_0 = \sqrt{2\,g\,h}$ (1.4)

$$v_0 = \sqrt{2 \times 10 \times 5{,}0}$$

$$\boxed{v_0 = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

COMPRENDRE
Les données g et h ont deux chiffres significatifs : le résultat en garde deux. Cette vitesse vaut $36\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, ce qui est beaucoup pour un toboggan.

À LA CALCULATRICE



1.6 En réalité, la vitesse en O est nettement inférieure et vaut $5{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Comment expliquer cette différence ?

Le modèle néglige les frottements. En réalité, les frottements de la piste sur l'enfant, et dans une moindre mesure ceux de l'air, ne sont pas négligeables. Ces forces ne sont pas conservatives et leur travail est résistant : l'énergie mécanique diminue entre D et O, une partie étant dissipée sous forme de chaleur.

L'énergie cinétique en O est plus faible que $m\,g\,h$, donc la vitesse réelle ($5{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$) est inférieure aux $10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ du modèle sans frottement.

COMPRENDRE
Vitesse divisée par 2, donc énergie cinétique divisée par 4 : les trois quarts de l'énergie mécanique de départ ont été dissipés par les frottements.

2.1 Énoncer la deuxième loi de Newton.

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système de masse m constante est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$$

PIÈGE
Oublier « dans un référentiel galiléen » : la loi n'est valable que dans ce cadre, et cette précision fait partie de l'énoncé attendu.

2.2 Appliquer la deuxième loi de Newton à l'enfant une fois qu'il a quitté le point O.

Système : l'enfant, assimilé au point matériel G de masse m.
Référentiel terrestre supposé galiléen.

Après O, l'enfant ne touche plus la piste et les actions de l'air sont négligées : la seule force est son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ (chute libre).

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$.

$$\vec{a} = \vec{g}$$

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, puis la loi. Ces quatre lignes rapportent des points même si la suite est fausse.

2.3 Déterminer l'expression des composantes $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération dans le repère Oxy.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, dirigé vers le bas, alors que l'axe (Oy) est orienté vers le haut. On projette $\vec{a} = \vec{g}$ sur les deux axes :

$$a_x(t) = 0 \qquad a_y(t) = -g$$

PIÈGE
Le signe de a_y dépend de l'orientation de l'axe vertical. Ici (Oy) monte : $a_y = -g$, et non $+g$.

2.4 Déterminer l'expression des composantes $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse dans le repère Oxy.

Données utiles à $t = 0$, l'enfant est en O avec la vitesse $\vec{v}_0$ inclinée de α au-dessus de l'horizontale

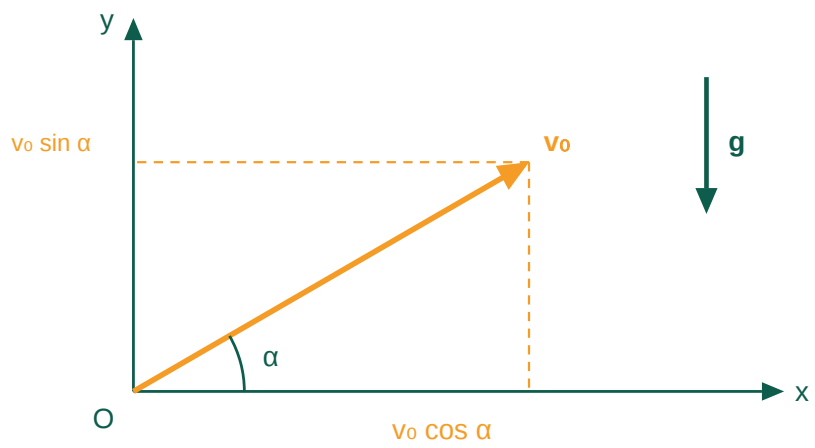
Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de a_x et a_y :

$v_x(t) = C_1 \qquad v_y(t) = -g\,t + C_2$

Conditions initiales : à $t = 0$, $v_x(0) = v_0 \cos\alpha$ et $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$, donc $C_1 = v_0 \cos\alpha$ et $C_2 = v_0 \sin\alpha$.

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha \qquad v_y(t) = -g\,t + v_0 \sin\alpha$$

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration, ou inverser sinus et cosinus : α est mesuré par rapport à l'horizontale, donc le cosinus va avec x.



2.4 · Le vecteur vitesse initiale en O et ses composantes

2.5 Déterminer l'expression des composantes $x(t)$ et $y(t)$ du vecteur position dans le repère Oxy.

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de v_x et v_y :

$x(t) = v_0 \cos\alpha\; t + C_3 \qquad y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\alpha\; t + C_4$

Conditions initiales : à $t = 0$, l'enfant est en O, donc $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, d'où $C_3 = 0$ et $C_4 = 0$.

$$x(t) = v_0 \cos\alpha\; t \qquad y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin\alpha\; t$$

COMPRENDRE
Selon x, le mouvement est uniforme (aucune force horizontale) ; selon y, il est uniformément accéléré. La masse de l'enfant n'apparaît nulle part.

2.6 Montrer que la trajectoire de l'enfant a pour équation $y(x) = -\dfrac{1}{2}\,g\,\dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha$.

On élimine le temps. D'après $x(t)$: $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$.

On remplace dans $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \times \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Avec $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$:

$y(x) = -\dfrac{1}{2}\,g\,\dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha$: c'est l'expression attendue (arc de parabole).

MÉTHODE
Équation de trajectoire : isoler t dans l'équation horaire la plus simple, celle de $x(t)$, puis le reporter dans $y(t)$. Le temps doit avoir disparu du résultat.

2.7 En déduire la valeur de l'abscisse x_P du point d'impact P de l'enfant dans l'eau.

Données utiles $v_0 = 5{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 30^\circ$; $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $H = 0{,}50\ \text{m}$

La surface de l'eau est à la distance H sous O : au point P, $y_P = -H = -0{,}50$ m. Il faut résoudre $y(x_P) = -H$.

Coefficients : $\dfrac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha} = \dfrac{10}{2\times 5{,}0^2\times\cos^2 30^\circ} = 0{,}267\ \text{m}^{-1}$

et $\tan 30^\circ = 0{,}577$.

L'équation devient : $-0{,}267\,x_P^2 + 0{,}577\,x_P + 0{,}50 = 0$.

Discriminant : $\Delta = 0{,}577^2 + 4\times 0{,}267\times 0{,}50 = 0{,}867$, donc $\sqrt{\Delta} = 0{,}931$.

$$x_1 = \frac{-0{,}577 - 0{,}931}{2\times(-0{,}267)} = 2{,}83\ \text{m}$$

$$x_2 = \frac{-0{,}577 + 0{,}931}{2\times(-0{,}267)} = -0{,}66\ \text{m}$$

Le point P est en avant de O : on garde la solution positive.

$$\boxed{x_P = 2{,}8\ \text{m}}$$

PIÈGE
Écrire $y_P = +H$ ou $y_P = 0$: l'eau est sous l'origine, donc y_P est négatif. Vérifier aussi que la calculatrice est en degrés.

MÉTHODE
Garder les valeurs non arrondies dans la calculatrice et n'arrondir qu'à la fin, à deux chiffres significatifs comme les données.

À LA CALCULATRICE

