Un service au tennis

Bac S 2009 Amérique du Sud (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Faire le bilan des forces appliquées à la balle entre D et B ; en donner les caractéristiques (direction, sens, grandeur) et l'expression.

Données utiles $m = 58{,}0$ g ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; action de l'air négligeable

Système {balle}, référentiel terrestre supposé galiléen.

Une fois la balle partie de la raquette, et l'action de l'air étant négligée, une seule force s'exerce : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

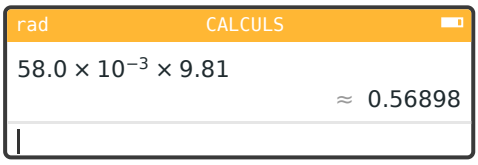
- direction : verticale ;
- sens : vers le bas ;
- valeur : $P = m\,g = 58{,}0 \times 10^{-3} \times 9{,}81 = 0{,}569$ N.

Seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g} = -m\,g\,\vec{j}$, vertical, vers le bas, de valeur $P = 0{,}569$ N.

PIÈGE
Ajouter la force de la raquette. Elle n'agit que pendant la frappe : entre D et B la balle ne touche plus rien. La masse doit être convertie en kilogrammes.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme m et g. La valeur de g n'est donnée qu'en partie 2 du sujet, mais elle est nécessaire ici pour chiffrer le poids.

À LA CALCULATRICE



1.2 Établir l'expression du vecteur accélération de la balle au cours de son mouvement.

Deuxième loi de Newton, la masse étant constante : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$.

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, où $\vec{j}$ est vertical vers le haut : $a_x = 0$; $a_y = -g$; $a_z = 0$.

$\vec{a} = \vec{g} = -g\,\vec{j}$

COMPRENDRE
La masse se simplifie : sans action de l'air, l'accélération est la même pour toutes les balles. Le vecteur $\vec{a}$ est constant, vertical et dirigé vers le bas pendant tout le vol.

1.3 Montrer que les équations horaires du mouvement sont $x(t) = v_0\,t$, $y(t) = -\dfrac{g\,t^2}{2} + H$ et $z(t) = 0$.

Données utiles à $t = 0$: balle en D $(0;H;0)$, vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{i}$; $\vec{a}$ (1.2)

Comme $\vec{a} = \dfrac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t}$, on cherche les primitives de $a_x = 0$, $a_y = -g$, $a_z = 0$:

$v_x = C_1$; $v_y = -g\,t + C_2$; $v_z = C_3$.

À $t = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ est horizontale selon $\vec{i}$: $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$.

Donc

$$v_x = v_0 \qquad v_y = -g\,t \qquad v_z = 0$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\text{d}\overrightarrow{OM}}{\text{d}t}$, on intègre une seconde fois :

$x = v_0\,t + C_4$; $y = -\dfrac{g\,t^2}{2} + C_5$; $z = C_6$.

À $t = 0$, la balle est en D $(0;H;0)$: $C_4 = 0$, $C_5 = H$, $C_6 = 0$.

$x(t) = v_0\,t$; $y(t) = -\dfrac{g\,t^2}{2} + H$; $z(t) = 0$: ce sont les équations attendues.

PIÈGE
Oublier la constante H : la balle part de D, pas de l'origine O. Ici $\vec{v}_0$ est horizontale, donc $v_{0y} = 0$ et il n'y a ni cosinus ni sinus.

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : accélération, primitive, constante fixée par la vitesse initiale ; puis primitive, constante fixée par la position initiale. Les conditions initiales doivent apparaître explicitement sur la copie.

1.4 Montrer que le mouvement de la balle a lieu dans un plan.

À chaque instant, $z(t) = 0$: la balle ne quitte jamais le plan d'équation $z = 0$.

Le mouvement est plan : il a lieu dans le plan vertical (xOy), qui contient $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$.

COMPRENDRE
Ni la vitesse initiale ni l'accélération n'ont de composante selon $\vec{k}$: rien ne peut faire sortir la balle du plan vertical contenant $\vec{v}_0$.

1.5 Déduire de la question 1.3 l'équation littérale de la trajectoire de la balle dans le plan xOy.

On élimine le temps : $x = v_0\,t$ donne $t = \dfrac{x}{v_0}$.

En reportant dans $y(t)$: $y = -\dfrac{g}{2}\left(\dfrac{x}{v_0}\right)^2 + H$.

$y(x) = -\dfrac{g}{2\,v_0^2}\,x^2 + H$: la trajectoire est un arc de parabole.

MÉTHODE
Pour passer des équations horaires à la trajectoire, on isole t dans l'équation la plus simple (ici x) et on le remplace dans l'autre. Le résultat ne doit plus contenir t.

2.1 Sachant que $OF = 12{,}2$ m, la balle, supposée ponctuelle, passe-t-elle au-dessus du filet ?

Données utiles $v_0 = 126\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; $H = 2{,}20$ m ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; hauteur du filet : $0{,}920$ m ; $y(x)$ (1.5)

Conversion : $v_0 = \dfrac{126}{3{,}6} = 35{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

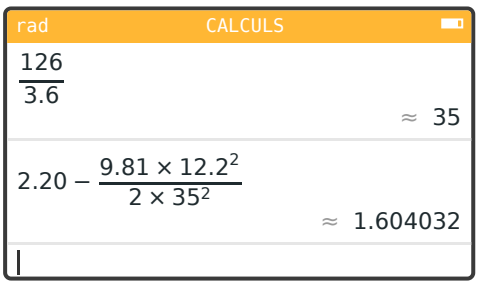
Altitude de la balle à la verticale du filet, en $x = OF$:

$$y(OF) = -\frac{g}{2\,v_0^2}\,OF^2 + H = -\frac{9{,}81 \times 12{,}2^2}{2 \times 35{,}0^2} + 2{,}20 = 1{,}60\ \text{m}$$

$y(OF) = 1{,}60\ \text{m} > 0{,}920\ \text{m}$: la balle passe au-dessus du filet.

PIÈGE
Laisser v_0 en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$: on trouverait $y \approx 2{,}15$ m, résultat faux. La conclusion doit comparer explicitement la valeur trouvée à la hauteur du filet.

À LA CALCULATRICE



2.2 Montrer que le service est mauvais, c'est-à-dire que la balle frappe le sol en un point B' tel que OB' soit supérieur à OB.

Données utiles $OB = L = 18{,}7$ m ; $v_0 = 35{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (2.1) ; $H = 2{,}20$ m ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

La balle touche le sol en B' lorsque $y = 0$:

$-\dfrac{g}{2\,v_0^2}\,x_{B'}^2 + H = 0$, soit $x_{B'}^2 = \dfrac{2\,v_0^2\,H}{g}$.

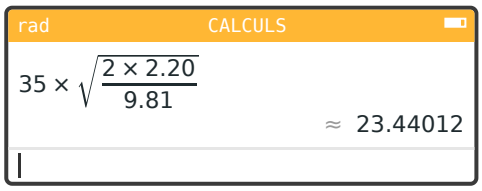
On garde la solution positive :

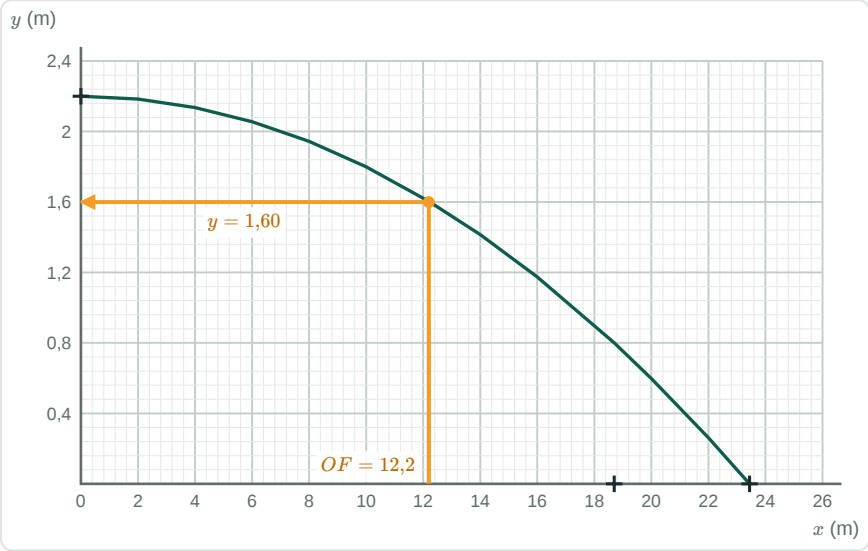
$$OB' = x_{B'} = v_0\sqrt{\frac{2\,H}{g}} = 35{,}0 \times \sqrt{\frac{2 \times 2{,}20}{9{,}81}} = 23{,}4\ \text{m}$$

$OB' = 23{,}4\ \text{m} > OB = 18{,}7\ \text{m}$: la balle retombe trop loin, le service est mauvais.

COMPRENDRE
Autre lecture possible : en $x = 18{,}7$ m, la balle est encore à $y = 0{,}80$ m du sol. Elle survole donc le point B au lieu d'y tomber.

À LA CALCULATRICE





2.2 · Trajectoire calculée de la balle (sans action de l'air)

2.3 En réalité, la balle tombe en B. Quel paramètre, non pris en compte dans ce problème, peut expliquer cette différence ?

Le modèle néglige l'action de l'air. En réalité, l'air exerce sur la balle une force de frottement, opposée à la vitesse, qui la freine : la portée réelle est plus courte que la portée calculée.

Le paramètre négligé est l'action de l'air (frottements) : elle ramène le point de chute de B' vers B.

COMPRENDRE
À $126\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, l'air n'est plus négligeable pour une balle aussi légère. Les joueurs la font aussi tourner sur elle-même : l'air la rabat alors vers le sol, ce qui raccourcit encore la trajectoire.

3.1 Donner l'expression littérale de la variation d'énergie potentielle de la balle entre l'instant où elle quitte la raquette et celui où elle touche le sol. Calculer sa valeur.

Données utiles $m = 58{,}0$ g ; $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $H = 2{,}20$ m

Avec l'axe (Oy) vertical orienté vers le haut et la référence au niveau du sol : $E_p = m\,g\,y$.

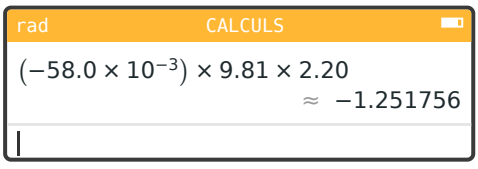
$\Delta E_p = E_{pB'} - E_{pD} = m\,g\,y_{B'} - m\,g\,y_D$, avec $y_{B'} = 0$ et $y_D = H$.

$$\Delta E_p = -m\,g\,H = -58{,}0 \times 10^{-3} \times 9{,}81 \times 2{,}20 = -1{,}25\ \text{J}$$

$\Delta E_p = -m\,g\,H = -1{,}25$ J

PIÈGE
Une variation, c'est « valeur finale moins valeur initiale ». La balle descend : son énergie potentielle de pesanteur diminue et le résultat doit être négatif. Un signe « + » fait perdre le point.

À LA CALCULATRICE



3.2 Quelle est l'expression de l'énergie cinétique de la balle lorsqu'elle part de D ? Indiquer les unités dans le système international.

En D, la vitesse de la balle a pour valeur v_0.

$E_{cD} = \dfrac{1}{2}\,m\,v_0^2$, avec m en kilogrammes (kg), v_0 en mètres par seconde ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) et E_{cD} en joules (J).

COMPRENDRE
Aucune valeur n'est demandée. Avec $m = 0{,}0580$ kg et $v_0 = 35{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, on trouverait $35{,}5$ J : bien plus que les $1{,}25$ J perdus en énergie potentielle.

3.3 Écrire les expressions de l'énergie mécanique de la balle en D (E_{mD}) et en B' ($E_{mB'}$).

L'énergie mécanique est la somme $E_m = E_c + E_p$, avec $E_p = m\,g\,y$.

En D ($y_D = H$) : $E_{mD} = \dfrac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,H$.

En B' ($y_{B'} = 0$) : $E_{mB'} = \dfrac{1}{2}\,m\,v_{B'}^2 + 0$.

$$E_{mD} = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,H \text{ et } E_{mB'} = \frac{1}{2}\,m\,v_{B'}^2$$

3.4 Quelle est la relation entre E_{mD} et $E_{mB'}$? Justifier.

Entre D et B', la balle n'est soumise qu'à son poids, qui est une force conservative ; l'action de l'air (force non conservative) est négligée. L'énergie mécanique se conserve donc.

$E_{mD} = E_{mB'}$: l'énergie mécanique de la balle est constante pendant le vol.

PIÈGE
Écrire l'égalité sans la justifier. Le point est attribué à l'argument : seule force, le poids, conservative ; pas de frottement.

3.5 Déduire de la question 3.4 l'expression de la vitesse $v_{B'}$ de la balle lorsqu'elle frappe le sol. Calculer cette vitesse.

Données utiles $v_0 = 35{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (2.1) ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $H = 2{,}20\ \text{m}$

$E_{mB'} = E_{mD}$ s'écrit : $\dfrac{1}{2}\,m\,v_{B'}^2 = \dfrac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,H$.

En divisant par $\dfrac{m}{2}$: $v_{B'}^2 = v_0^2 + 2\,g\,H$. La valeur d'une vitesse est positive :

$$v_{B'} = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,H} = \sqrt{35{,}0^2 + 2 \times 9{,}81 \times 2{,}20} = 35{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v_{B'} = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,H} = 35{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit environ $128\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

COMPRENDRE
La balle arrive au sol un peu plus vite qu'elle n'est partie : l'énergie potentielle perdue est devenue de l'énergie cinétique. La masse n'intervient pas dans le résultat.

À LA CALCULATRICE

