Observation des satellites de Neptune par la sonde Voyager

Bac S 2009 Centres étrangers (ancien programme) · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Choisir le référentiel dans lequel est décrite l'orbite elliptique de Néréide : héliocentrique, néréidocentrique, neptunocentrique ou géocentrique.

Néréide est un satellite de Neptune : son orbite est décrite par rapport au centre de Neptune.

Réponse **c** : référentiel neptunocentrique.

COMPRENDRE
Ce référentiel a pour origine le centre de Neptune et des axes dirigés vers des étoiles lointaines. Dans le référentiel néréidocentrique, Néréide serait immobile.

1.2 Énoncer les première et deuxième lois de Kepler appliquées au cas étudié.

Première loi (loi des orbites) : dans le référentiel neptunocentrique, la trajectoire du centre de Néréide est une ellipse dont le centre N de Neptune est l'un des foyers.

Deuxième loi (loi des aires) : le segment qui joint le centre de Neptune à celui de Néréide balaie des aires égales pendant des durées égales.

Orbite elliptique de foyer N ; aires balayées égales pendant des durées égales.

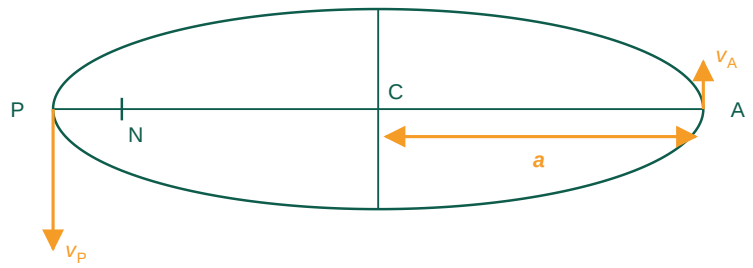
PIÈGE
Énoncer les lois avec « le Soleil » et « la planète ». La question demande de les appliquer au cas étudié : l'astre attracteur est Neptune, le satellite est Néréide.

1.3 Placer sur la figure 1 de l'annexe la demi-longueur a du grand axe de l'orbite de Néréide.

Le grand axe est le segment [PA]. Sa demi-longueur est la distance du centre C de l'ellipse à l'un des sommets : $a = CA = CP = \dfrac{PA}{2}$.

a est la longueur du segment [CA] (ou [CP]), tracée en orange sur l'annexe.

PIÈGE
Mesurer a à partir de N. Neptune occupe un foyer, pas le centre de l'ellipse : NA et NP sont différents de a.



1.3 · Annexe complétée : demi-grand axe a (question 1.3) et vitesses en P et A (question 1.4.2)

1.4.1 Quelle relation relie les aires balayées autour du péricentre (N, P1, P2) et autour de l'apocentre (N, A1, A2) pendant une même durée ?

Les deux surfaces sont balayées par le segment Neptune-Néréide pendant la même durée. D'après la deuxième loi de Kepler, elles ont la même aire.

$\mathcal{A}(NP_1P_2) = \mathcal{A}(NA_1A_2)$

1.4.2 Comparer alors les vitesses de Néréide aux points A et P.

Les arcs P_1P_2 et A_1A_2 sont parcourus pendant la même durée Δt. Près de P, le segment Neptune-Néréide est court : pour balayer la même aire, l'arc doit être plus long. Donc $P_1P_2 > A_1A_2$.

Vitesses moyennes sur ces arcs : $v_P = \dfrac{P_1P_2}{\Delta t}$ et $v_A = \dfrac{A_1A_2}{\Delta t}$.

$v_P > v_A$: Néréide est plus rapide au péricentre qu'à l'apocentre.

COMPRENDRE
Sur l'annexe (figure de la question 1.3), les vecteurs vitesse sont tangents à l'ellipse en P et en A, donc perpendiculaires au grand axe, et celui tracé en P est le plus long.

MÉTHODE
Loi des aires : plus le satellite est proche de l'astre attracteur, plus il va vite. Vitesse maximale au péricentre, minimale à l'apocentre.

1.5.1 Énoncer la troisième loi de Kepler.

Pour tous les satellites d'un même astre (ici Neptune), le carré de la période de révolution T est proportionnel au cube de la demi-longueur a du grand axe de l'orbite :

$\dfrac{T^2}{a^3} = \text{constante}$, la même pour tous les satellites de Neptune.

COMPRENDRE
Pour une orbite circulaire, a est le rayon de l'orbite. La constante vaut $\dfrac{4\pi^2}{G\,M_N}$: elle ne dépend que de la masse de Neptune (résultat établi en 2.4).

1.5.2 Calculer la valeur de $\dfrac{T_{rev}^2}{R_1^3}$ en $\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$.

Données utiles $T_{rev} = 5{,}877$ jours solaires ; $R_1 = 3{,}547 \times 10^5$ km ; 1 jour solaire = 86 400 s

Conversions : $T_{rev} = 5{,}877 \times 86\,400 = 5{,}078 \times 10^5$ s et $R_1 = 3{,}547 \times 10^5$ km $= 3{,}547 \times 10^8$ m.

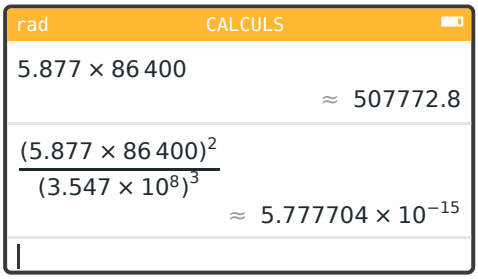
$$\frac{T_{rev}^2}{R_1^3} = \frac{(5{,}877 \times 86\,400)^2}{(3{,}547 \times 10^8)^3}$$

$\dfrac{T_{rev}^2}{R_1^3} = 5{,}778 \times 10^{-15}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$

PIÈGE
Laisser R_1 en kilomètres ou T_{rev} en jours : l'unité imposée est $\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$. Une erreur de 10^3 sur R_1 devient 10^9 sur le résultat.

COMPRENDRE
Quatre chiffres significatifs, comme les données T_{rev} et R_1. Le résultat s'exprime avec autant de chiffres que la donnée la moins précise.

À LA CALCULATRICE



1.5.3 En déduire la période de révolution T_{ner} de Néréide, puis comparer à la valeur donnée dans le texte.

Données utiles $a = 5513 \times 10^3$ km ; $\frac{T_{rev}^2}{R_1^3} = 5{,}778 \times 10^{-15}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$ (1.5.2) ; texte : 360 jours

Triton et Néréide sont deux satellites de Neptune. D'après la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T_{ner}^2}{a^3} = \frac{T_{rev}^2}{R_1^3} \quad \text{donc} \quad T_{ner} = \sqrt{\frac{T_{rev}^2}{R_1^3} \times a^3}$$

Avec $a = 5513 \times 10^3\ \text{km} = 5{,}513 \times 10^9$ m :

$T_{ner} = \sqrt{5{,}778 \times 10^{-15} \times (5{,}513 \times 10^9)^3} = 3{,}111 \times 10^7$ s, soit $\frac{3{,}111 \times 10^7}{86\,400} = 360{,}1$ jours solaires.

$T_{ner} = 3{,}111 \times 10^7$ s $\approx 360{,}1$ jours : valeur en accord avec les 360 jours du texte.

MÉTHODE

Plus rapide : $T_{ner} = T_{rev} \times \left(\frac{a}{R_1}\right)^{3/2}$. Dans un rapport, il suffit que a et R_1 aient la même unité (km) ; T_{ner} sort alors directement en jours.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\sqrt{5.778 \times 10^{-15} \times (5.513 \times 10^9)^3} \approx 3.111507 \times 10^7$

$\frac{\sqrt{5.778 \times 10^{-15} \times (5.513 \times 10^9)^3}}{86\,400} \approx 360.1281$

2.1 Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par Neptune sur Triton et calculer sa valeur.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_N = 1{,}025 \times 10^{26}$ kg ; $M_1 = 2{,}147 \times 10^{22}$ kg ; $R_1 = 3{,}547 \times 10^8$ m

La force est attractive, dirigée de T vers N, donc de sens opposé à $\vec{u}$:

$$\vec{F} = -\frac{G\,M_N\,M_1}{R_1^2}\,\vec{u}$$

Valeur : $F = \frac{G\,M_N\,M_1}{R_1^2} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}025 \times 10^{26} \times 2{,}147 \times 10^{22}}{(3{,}547 \times 10^8)^2}$

$\vec{F} = -\frac{G\,M_N\,M_1}{R_1^2}\,\vec{u}$ et $F = 1{,}17 \times 10^{21}$ N

PIÈGE

Oublier le signe « $-$ » : $\vec{u}$ est orienté de N vers T, la force attire Triton vers N. La valeur F, elle, est positive. Penser aussi à convertir R_1 en mètres.

COMPRENDRE

Trois chiffres significatifs seulement : G est la donnée la moins précise.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 1.025 \times 10^{26} \times 2.147 \times 10^{22}}{(3.547 \times 10^8)^2} \approx 1.1667 \times 10^{21}$

2.2 Le mouvement de Triton étant uniforme, établir avec la deuxième loi de Newton l'expression de sa vitesse V en fonction de M_N, R_1 et G.

Système {Triton}, de masse M_1 ; référentiel neptunocentrique supposé galiléen ; seule force : $\vec{F}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = M_1\,\vec{a}$, soit $-\dfrac{G\,M_N\,M_1}{R_1^2}\,\vec{u} = M_1\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = -\dfrac{G\,M_N}{R_1^2}\,\vec{u}$.

Le mouvement est circulaire et uniforme : l'accélération est centripète, de valeur $a = \dfrac{V^2}{R_1}$.

En égalant les deux valeurs : $\dfrac{V^2}{R_1} = \dfrac{G\,M_N}{R_1^2}$, d'où $V^2 = \dfrac{G\,M_N}{R_1}$.

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{G\,M_N}{R_1}}}$$

PIÈGE
Ne pas préciser le système et le référentiel galiléen, ou écrire $a = \dfrac{V^2}{R_1}$ sans rappeler que le mouvement est circulaire uniforme.

COMPRENDRE
La masse M_1 de Triton se simplifie : la vitesse sur une orbite circulaire ne dépend que de l'astre attracteur et du rayon de l'orbite.

2.3 Calculer cette vitesse V et la comparer à celle donnée dans l'énoncé.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_N = 1{,}025 \times 10^{26}$ kg ; $R_1 = 3{,}547 \times 10^8$ m ; $v_0 = 4\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$

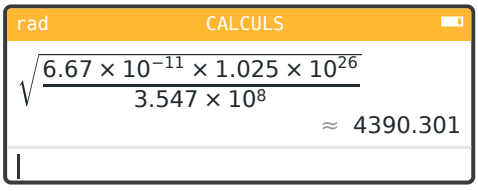
$$V = \sqrt{\frac{G\,M_N}{R_1}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}025 \times 10^{26}}{3{,}547 \times 10^8}} = 4{,}39 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'énoncé donne $v_0 = 4\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$, avec un seul chiffre significatif : $4{,}39$ arrondi à un chiffre donne bien 4.

$$\boxed{V = 4{,}39 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 4{,}39\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}\text{, en accord avec } v_0.}$$

PIÈGE
Conclure à un désaccord parce que $4{,}39 \neq 4$. Une comparaison tient compte de la précision de la valeur donnée, ici un seul chiffre significatif.

À LA CALCULATRICE



2.4 Montrer que la période de révolution T_{rev} de Triton peut s'exprimer en fonction de M_N, R_1 et G.

Pendant une période T_{rev}, Triton parcourt à vitesse constante le périmètre $2\pi R_1$ de son orbite : $V = \dfrac{2\pi R_1}{T_{rev}}$, donc $T_{rev} = \dfrac{2\pi R_1}{V}$.

Avec $V = \sqrt{\dfrac{G\,M_N}{R_1}}$ (2.2) : $T_{rev} = 2\pi R_1 \sqrt{\dfrac{R_1}{G\,M_N}}$

$$\boxed{T_{rev} = 2\pi\sqrt{\frac{R_1^3}{G\,M_N}}}$$

COMPRENDRE
En élevant au carré, $\dfrac{T_{rev}^2}{R_1^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_N}$: on retrouve la troisième loi de Kepler et l'expression de sa constante.

2.5 Calculer la valeur de T_{rev} et comparer à la valeur donnée par l'énoncé.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_N = 1{,}025 \times 10^{26}$ kg ; $R_1 = 3{,}547 \times 10^{8}$ m ; énoncé : 5,877 jours solaires

$$T_{rev} = 2\pi\sqrt{\frac{(3{,}547 \times 10^{8})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}025 \times 10^{26}}} = 5{,}08 \times 10^{5}\ \text{s}$$

En jours solaires : $T_{rev} = \dfrac{5{,}076 \times 10^{5}}{86\,400} = 5{,}88$ jours.

L'énoncé donne 5,877 jours, soit 5,88 jours avec trois chiffres significatifs : les deux valeurs concordent.

$T_{rev} = 5{,}08 \times 10^{5}\ \text{s} = 5{,}88$ jours solaires, en accord avec l'énoncé.

PIÈGE
Diviser la valeur déjà arrondie ($5{,}08 \times 10^{5}$ s) par 86 400 : on conserve la valeur complète de la calculatrice pour les calculs intermédiaires.

COMPRENDRE
Le calcul donne 5,875 jours, à 0,03 % de la valeur de l'énoncé. Le résultat se limite à trois chiffres significatifs à cause de G.

À LA CALCULATRICE

