Le super condensateur prêt à sortir de l'ombre

Bac S 2010 Polynésie rattrapage (ancien programme) · Exercice 4 **6 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1.1 Montrer que le graphe $i(t)$ est obtenu à partir de l'enregistrement de $u_R(t)$.

Données utiles $R = 20\ \Omega$

Le conducteur ohmique est fléché en convention récepteur (u_R opposée à i) : la loi d'Ohm donne $u_R(t) = R\,i(t)$.

Le logiciel divise donc chaque valeur enregistrée de u_R par $R = 20\ \Omega$ pour tracer $i(t)$.

$$\boxed{i(t) = \frac{u_R(t)}{R}}$$

COMPRENDRE
Un système d'acquisition ne mesure que des tensions. Pour suivre une intensité, on enregistre la tension aux bornes d'un conducteur ohmique : elle lui est proportionnelle.

1.2 Utiliser l'un des graphes pour déterminer la relation numérique entre la tension u aux bornes du condensateur et le temps. Justifier le calcul.

Le graphe $u(t)$ est une droite qui passe par l'origine : u est proportionnelle au temps, $u = k\,t$.

Coefficient directeur, entre l'origine et le point (18 s ; 4,5 V) :

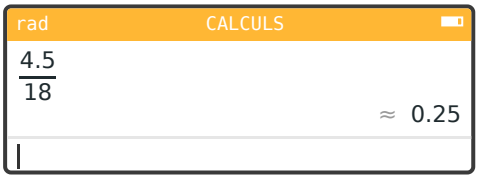
$$k = \frac{4{,}5 - 0}{18 - 0} = 0{,}25\ \text{V} \cdot \text{s}^{-1}$$

$\boxed{u = 0{,}25\,t}$ (avec u en volts et t en secondes)

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme les valeurs lues sur le graphe (4,5 V et 18 s).

MÉTHODE
Pour un coefficient directeur, choisir deux points de la droite très éloignés l'un de l'autre : l'erreur de lecture pèse moins sur le résultat.

À LA CALCULATRICE



1.3 Le condensateur étant déchargé à $t = 0$ s, donner l'expression littérale de la charge q_A portée par l'armature A en fonction du temps.

Le courant i arrive sur l'armature A : $i = \dfrac{\mathrm{d}q_A}{\mathrm{d}t}$.

L'intensité est constante, $i = I$, donc q_A est une primitive d'une constante : $q_A(t) = I\,t + K$.

Condition initiale : $q_A(0) = 0$, d'où $K = 0$.

$$\boxed{q_A(t) = I\,t}$$

PIÈGE
Oublier la constante d'intégration. C'est la condition initiale (condensateur déchargé) qui permet de l'annuler ; il faut l'écrire.

1.4 Calculer le quotient $\dfrac{q_A}{u}$. Que représente-t-il ?

Données utiles $I = 0{,}25$ A (graphe $i(t)$) ; $k = 0{,}25\ \text{V} \cdot \text{s}^{-1}$ (1.2) ; $q_A = I\,t$ (1.3)

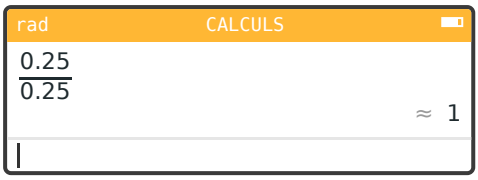
$$\frac{q_A}{u} = \frac{I\,t}{k\,t} = \frac{I}{k} = \frac{0{,}25}{0{,}25} = 1{,}0\ \text{C} \cdot \text{V}^{-1}$$

Ce quotient ne dépend pas du temps. Comme $q_A = C\,u$ pour un condensateur, il représente la capacité C.

$$\boxed{\frac{q_A}{u} = C = 1{,}0\ \text{F}}$$

COMPRENDRE
Un farad est un coulomb par volt. Une capacité de 1 F est énorme : les condensateurs usuels se comptent en microfarads, d'où le nom de super condensateur.

À LA CALCULATRICE



2.1 D'après les graphes, quelles sont les valeurs de u et i lorsque le condensateur est chargé ?

Lorsque le condensateur est chargé, les deux courbes ont atteint leur palier (au-delà de 100 s environ) : u ne varie plus et le courant ne circule plus.

$u = 5{,}0$ V (soit $u = E$) et $i = 0$ A

COMPRENDRE
Un condensateur chargé se comporte comme un interrupteur ouvert : plus de courant, donc $u_R = Ri = 0$ et toute la tension E se retrouve à ses bornes.

2.2 Rappeler l'expression de la constante de temps τ du circuit. La déterminer graphiquement en précisant la méthode.

Données utiles $E = 5{,}0$ V

Constante de temps : $\tau = RC$.

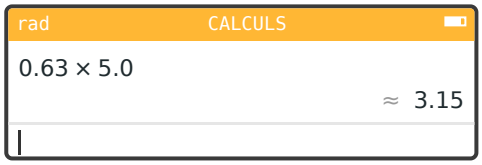
À la date $t = \tau$, la tension vaut 63 % de sa valeur finale : $u(\tau) = 0{,}63 \times 5{,}0 = 3{,}2$ V.

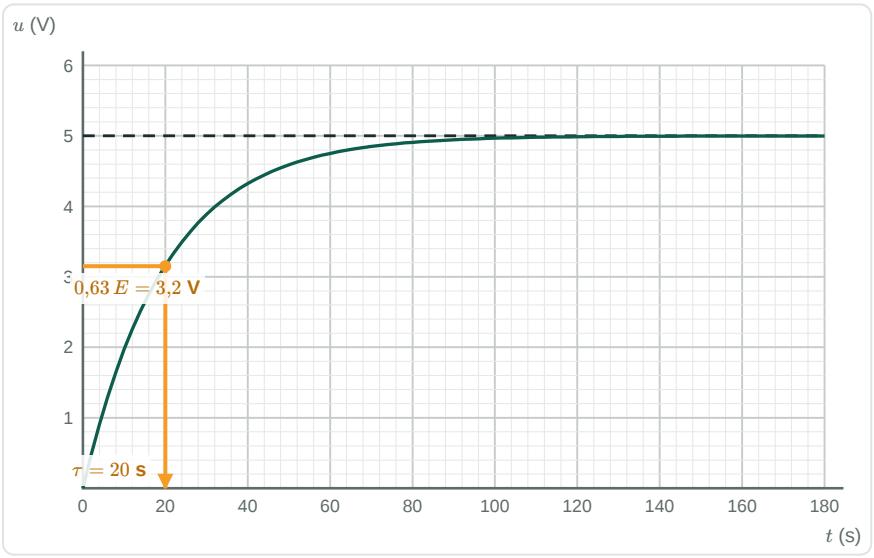
On trace l'horizontale $u = 3{,}2$ V ; elle coupe la courbe $u(t)$ en un point dont l'abscisse est τ.

$\tau = RC$; graphiquement $\tau = 20$ s

MÉTHODE
Autre méthode : tracer la tangente à l'origine de $u(t)$; elle coupe l'asymptote $u = E$ à la date $t = \tau$. Sur la courbe $i(t)$, chercher la date où i vaut 37 % de 0,25 A.

À LA CALCULATRICE





2.2 · Courbe $u(t)$ du sujet : lecture de τ à 63 % de la tension finale

2.3 En déduire la valeur de la capacité du condensateur. Comparer avec la valeur obtenue à la question 1.4.

Données utiles $\tau = 20$ s (2.2) ; $R = 20\ \Omega$; $C = 1{,}0$ F (1.4)

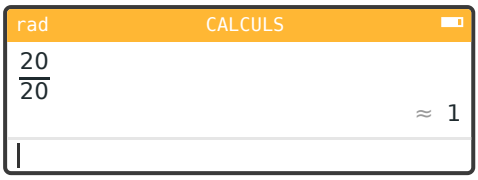
$\tau = RC$ donc $C = \dfrac{\tau}{R}$.

$$C = \frac{20}{20} = 1{,}0 \text{ F}$$

$C = 1{,}0$ F : même valeur qu'avec la charge à courant constant (1.4).

PIÈGE
Écrire « 1 F » sans la décimale : τ et R sont connus avec deux chiffres significatifs, le résultat aussi.

À LA CALCULATRICE



2.4 En respectant les notations du montage, montrer que la tension u vérifie l'équation différentielle $E = RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$.

Loi des mailles (additivité des tensions) : $E = u_R + u$.

Loi d'Ohm : $u_R = R\,i$.

Condensateur : $i = \dfrac{\mathrm{d}q_A}{\mathrm{d}t}$ et $q_A = C\,u$; comme C est constante, $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

Donc $u_R = RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, et en reportant dans la loi des mailles :

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$$

MÉTHODE

Toujours trois étapes pour un circuit RC : loi des mailles, loi d'Ohm, relation $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On élimine ensuite u_R et i pour ne garder que u.

2.5 La solution est de la forme $u(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. Montrer que pour $t = 5\tau$ le condensateur est quasiment chargé. Le vérifier graphiquement.

Données utiles $E = 5{,}0$ V ; $\tau = 20$ s (2.2)

$$u(5\tau) = E\left(1 - e^{-5\tau/\tau}\right) = E\left(1 - e^{-5}\right) = 0{,}993\,E$$

La tension atteint $99{,}3\ \%$ de sa valeur finale E, soit $4{,}97$ V : le condensateur est quasiment chargé.

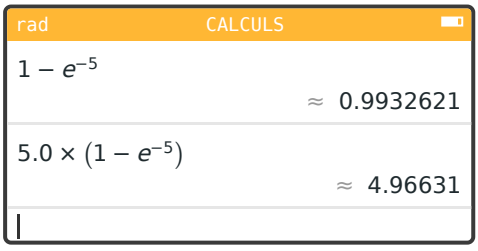
Vérification : $5\tau = 5 \times 20 = 100$ s ; à cette date, la courbe $u(t)$ est confondue avec son palier à $5{,}0$ V.

$u(5\tau) = 0{,}993\,E \approx E$: condensateur chargé à plus de $99\ \%$.

COMPRENDRE

Mathématiquement, u n'atteint jamais E. La date 5τ est le repère habituel pour dire que le régime permanent est établi.

À LA CALCULATRICE



3.1 À l'aide de considérations énergétiques, expliquer pourquoi on observe des oscillations électriques dans le circuit.

Le condensateur stocke de l'énergie électrique, $E_C = \frac{1}{2} C u^2$; la bobine stocke de l'énergie magnétique, $E_L = \frac{1}{2} L i^2$.

Quand le condensateur se décharge, E_C diminue et E_L augmente ; lorsque $u = 0$, toute l'énergie restante est dans la bobine. Celle-ci la restitue ensuite au condensateur, qui se recharge en sens inverse, et ainsi de suite.

Ces transferts d'énergie répétés entre le condensateur et la bobine font osciller u. À chaque échange, la résistance r dissipe une partie de l'énergie par effet Joule : l'amplitude décroît.

Le sujet annonce un condensateur chargé sous $5{,}0$ V, alors que la courbe fournie part de $u = 0$; cela ne change pas l'explication.

Oscillations : échange périodique d'énergie entre condensateur (E_C) et bobine (E_L), avec pertes par effet Joule.

COMPRENDRE
Avec un condensateur chargé sous $5{,}0$ V, la courbe devrait démarrer à $u = 5{,}0$ V.
L'enregistrement semble décalé d'un quart de période ; la durée d'une oscillation reste la même.

3.2 Qualifier le régime d'oscillations obtenu.

La tension oscille autour de zéro avec une amplitude qui diminue au cours du temps : les oscillations sont amorties.

Régime **pseudo-périodique**.

PIÈGE
Écrire « périodique » : la courbe ne se reproduit pas identique à elle-même puisque l'amplitude décroît. Seul l'intervalle de temps entre deux maximums reste constant.

3.3 Déterminer la valeur d'une grandeur temporelle liée aux oscillations.

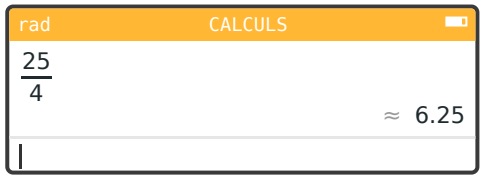
La grandeur est la pseudo-période T. Pour limiter l'erreur de lecture, on mesure la durée de quatre oscillations : la courbe coupe l'axe en montant à $t = 0$ puis, pour la quatrième fois, à $t = 25$ s.

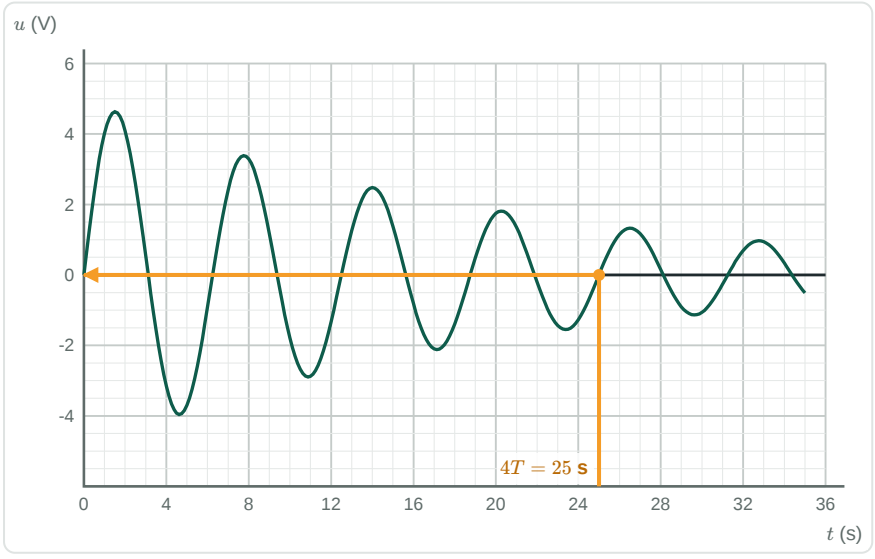
$$4T = 25 \text{ s} \quad \text{donc} \quad T = \frac{25}{4} = 6{,}25 \text{ s}$$

$T \approx 6{,}3$ s

MÉTHODE
Mesurer plusieurs pseudo-périodes puis diviser : l'incertitude de lecture est divisée d'autant.
Repérer des passages par zéro dans le même sens, plus nets que les sommets.

À LA CALCULATRICE





3.3 · Courbe $u(t)$ du sujet : quatre pseudo-périodes entre $t = 0$ et $t = 25$ s

3.4 Avec $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, et en assimilant la grandeur précédente à cette période propre, en déduire la capacité du condensateur. Comparer avec les deux méthodes précédentes.

Données utiles $T = 6{,}25$ s (3.3) ; $L = 1{,}0$ H

On pose $T = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. En élevant au carré : $T^2 = 4\pi^2\, L\, C$, donc

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2\, L} = \frac{6{,}25^2}{4\pi^2 \times 1{,}0} = 0{,}99 \text{ F}$$

Les deux premières méthodes donnent 1,0 F : l'écart est de $1\ \%$ environ, inférieur à la précision des lectures graphiques.

$C = 0{,}99$ F : les trois méthodes concordent, $C \approx 1{,}0$ F.

PIÈGE

Oublier d'élever 2π au carré en isolant C, ou calculer avec T déjà arrondie à $6{,}3$ s sans s'en rendre compte : garder $6{,}25$ s dans le calcul.

À LA CALCULATRICE

