Des isotopes du phosphore

Bac S 2010 Polynésie (ancien programme) · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1.1.1 Donner la composition du noyau de phosphore 32.

Données utiles $^{32}_{15}\mathrm{P}$

Le numéro atomique est $Z = 15$ et le nombre de nucléons $A = 32$, donc $A - Z = 32 - 15 = 17$.

Le noyau de phosphore 32 contient **15 protons** et **17 neutrons**.

PIÈGE
Le nombre du haut, 32, compte tous les nucléons, pas les neutrons. On ne parle pas d'électrons : la question porte sur le noyau.

1.1.2 Définir le terme « isotope ».

Des noyaux isotopes possèdent le même nombre de protons Z (même élément chimique) mais des nombres de neutrons différents, donc des nombres de nucléons A différents.

COMPRENDRE
Les phosphores 30, 31 et 32 ont tous 15 protons ; ils comptent respectivement 15, 16 et 17 neutrons.

1.1.3 Quelle est la particule émise lors d'une radioactivité β^- ?

Une désintégration β^- s'accompagne de l'émission d'un **électron**, noté $^{0}_{-1}\mathrm{e}$.

PIÈGE
Ne pas confondre avec la radioactivité β^+, qui émet un positon $^{0}_{1}\mathrm{e}$, ni avec la radioactivité α, qui émet un noyau d'hélium $^{4}_{2}\mathrm{He}$.

1.1.4 Énoncer les lois de conservation d'une réaction nucléaire, puis établir l'équation de désintégration du phosphore 32 en précisant l'élément formé.

Données utiles extrait de la classification : $_{14}\mathrm{Si}$; $_{15}\mathrm{P}$; $_{16}\mathrm{S}$; $_{17}\mathrm{Cl}$

Lors d'une réaction nucléaire, il y a conservation du nombre de charge (somme des Z) et conservation du nombre de nucléons (somme des A).

On écrit $^{32}_{15}\mathrm{P} \longrightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$.

- Nombre de nucléons : $32 = A + 0$, donc $A = 32$.
- Nombre de charge : $15 = Z - 1$, donc $Z = 16$: l'élément formé est le soufre.

$^{32}_{15}\mathrm{P} \longrightarrow {}^{32}_{16}\mathrm{S} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$: il se forme un noyau de **soufre 32**.

PIÈGE
L'électron porte le nombre de charge -1 : écrire $15 = Z + 1$ conduirait au silicium.

COMPRENDRE
Dans le noyau, un neutron se transforme en proton : Z augmente de 1 et A ne change pas. Un antineutrino est aussi émis ; il ne modifie ni A ni Z.

1.2.1 Calculer le nombre initial N_0 de noyaux de phosphore 32.

Données utiles $m_0 = 10{,}0 \times 10^{-9}$ g ; $m(\mathrm{P}) = 5{,}31 \times 10^{-26}$ kg

La masse de l'échantillon est celle de N_0 noyaux identiques : $m_0 = N_0 \times m(\mathrm{P})$, soit $N_0 = \dfrac{m_0}{m(\mathrm{P})}$.

Avec la même unité pour les deux masses : $m_0 = 10{,}0 \times 10^{-9}$ g $= 10{,}0 \times 10^{-12}$ kg.

$$N_0 = \frac{10{,}0 \times 10^{-12}}{5{,}31 \times 10^{-26}} = 1{,}88 \times 10^{14}$$

$N_0 = 1{,}88 \times 10^{14}$ noyaux

PIÈGE
m_0 est en grammes, $m(\mathrm{P})$ en kilogrammes. Sans conversion, le résultat est mille fois trop grand.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme les deux données. Dans tout l'exercice, le résultat a autant de chiffres que la donnée la moins précise.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{10.0 \times 10^{-12}}{5.31 \times 10^{-26}} \approx 1.883239 \times 10^{14}$$

1.2.2 Définir la demi-vie $t_{1/2}$, puis établir la relation entre $t_{1/2}$ et λ.

Données utiles $N = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$

La demi-vie $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents s'est désintégrée : $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$.

Avec la loi de décroissance : $N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{N_0}{2}$, donc $\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{1}{2}$.

En prenant le logarithme : $-\lambda\, t_{1/2} = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

$t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, soit $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$

COMPRENDRE

Vérification de la valeur annoncée : avec $t_{1/2} = 14{,}3$ jours convertis en secondes ($\times\, 86\,400$), on retrouve $\lambda = 5{,}61 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{\ln(2)}{14.3 \times 86\,400} \approx 5.610166 \times 10^{-7}$$

1.2.3 Définir l'activité $A(t)$ d'un échantillon, en déduire la relation entre $A(t)$ et $N(t)$, puis calculer l'activité initiale A_0.

Données utiles $\lambda = 5{,}61 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$; N_0 (1.2.1)

L'activité d'un échantillon est le nombre moyen de désintégrations qu'il produit par seconde ; elle s'exprime en becquerels (Bq). Comme N diminue :

$$A(t) = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$$

En dérivant $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$: $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda\, N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t} = -\lambda\, N(t)$, d'où $A(t) = \lambda\, N(t)$.

À l'instant initial : $A_0 = \lambda\, N_0 = \lambda\,\dfrac{m_0}{m(\mathrm{P})}$

$$A_0 = 5{,}61 \times 10^{-7} \times \frac{10{,}0 \times 10^{-12}}{5{,}31 \times 10^{-26}} = 1{,}06 \times 10^{8}\ \mathrm{Bq}$$

$A(t) = \lambda\, N(t)$ et $A_0 = 1{,}06 \times 10^{8}$ Bq

PIÈGE

Reprendre N_0 arrondi à $1{,}88 \times 10^{14}$ donne $1{,}05 \times 10^{8}$ Bq. On calcule avec la valeur non arrondie, gardée en mémoire.

COMPRENDRE

λ doit être en s^{-1} pour obtenir des becquerels. L'activité suit la même loi que N : $A(t) = A_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{5.61 \times 10^{-7} \times 10.0 \times 10^{-12}}{5.31 \times 10^{-26}} \approx 1.056497 \times 10^{8}$$

1.2.4 Déterminer l'instant t_1 où l'activité sera divisée par 10.

Données utiles $\lambda = 5{,}61 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$

On cherche t_1 tel que $A(t_1) = \dfrac{A_0}{10}$, avec $A(t) = A_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$:

$\mathrm{e}^{-\lambda t_1} = \dfrac{1}{10}$, donc $-\lambda\, t_1 = -\ln 10$, soit $t_1 = \dfrac{\ln 10}{\lambda}$.

$$t_1 = \frac{\ln 10}{5{,}61 \times 10^{-7}} = 4{,}10 \times 10^{6}\ \mathrm{s}$$

$t_1 = 4{,}10 \times 10^{6}$ s, soit environ 47,5 jours

MÉTHODE

Pour une activité divisée par k : $t = \dfrac{\ln k}{\lambda}$. Le cas $k = 2$ redonne la demi-vie. Le résultat ne dépend pas de A_0.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{\ln(10)}{5.61 \times 10^{-7}}$ $\approx$ 4104430

$\dfrac{4\,104\,429.756}{86\,400}$ $\approx$ 47.50497

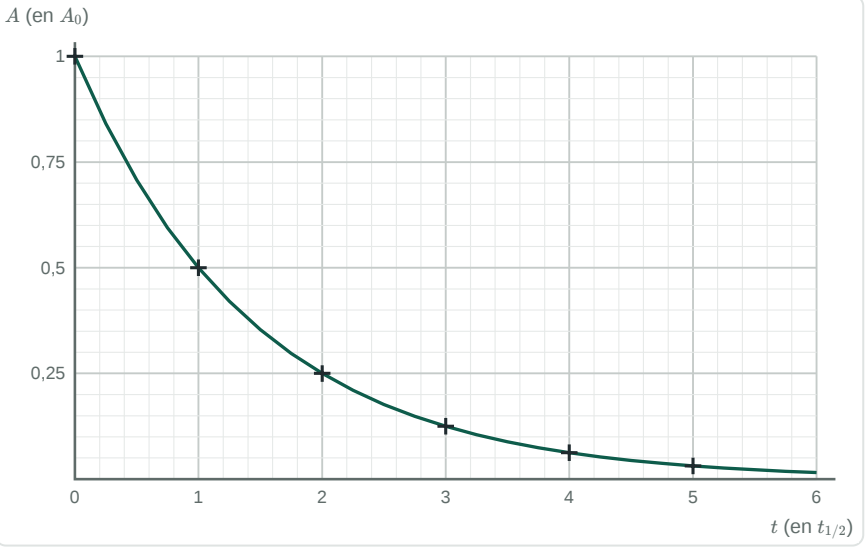
1.2.5 Tracer l'allure de la courbe représentant $A(t)$, sans calculatrice, à l'aide des activités aux instants $t_{1/2}$, $2\,t_{1/2}$, $3\,t_{1/2}$, $4\,t_{1/2}$, $5\,t_{1/2}$.

À chaque demi-vie écoulée, l'activité est divisée par deux :

$A(t_{1/2}) = \dfrac{A_0}{2}$; $A(2\,t_{1/2}) = \dfrac{A_0}{4}$; $A(3\,t_{1/2}) = \dfrac{A_0}{8}$; $A(4\,t_{1/2}) = \dfrac{A_0}{16}$; $A(5\,t_{1/2}) = \dfrac{A_0}{32}$

On place ces points et on les relie par une courbe décroissante, de plus en plus proche de l'axe des abscisses sans l'atteindre.

PIÈGE
Ne pas relier les points par des segments ni faire toucher l'axe des temps : la courbe est une exponentielle, qui tend vers zéro sans s'annuler.



1.2.5 · Allure de $A(t)$: l'activité est divisée par deux à chaque demi-vie

1.2.6 Retrouver graphiquement l'ordre de grandeur du temps t_1.

Données utiles $t_{1/2} = 14{,}3$ jours ; courbe (1.2.5)

On trace l'horizontale d'ordonnée $\dfrac{A_0}{10}$: elle coupe la courbe entre $3\,t_{1/2}$ (où $A = A_0/8$) et $4\,t_{1/2}$ (où $A = A_0/16$), vers $t_1 \approx 3{,}3\,t_{1/2}$.

$t_1 \approx 3{,}3 \times 14{,}3 \approx 47$ jours, soit $47 \times 86\,400 \approx 4 \times 10^6$ s.

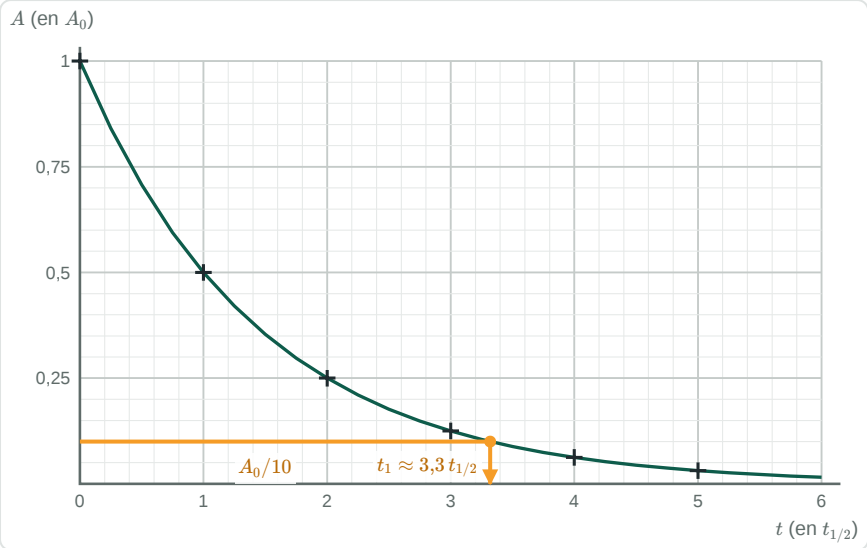
$t_1 \approx 3{,}3\,t_{1/2} \approx 4 \times 10^6$ s : ordre de grandeur 10^6 s, en accord avec la question 1.2.4.

COMPRENDRE
$A_0/10$ est compris entre $A_0/8$ et $A_0/16$, plus près de $A_0/8$: le point cherché est donc plus proche de $3\,t_{1/2}$ que de $4\,t_{1/2}$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$3.3 \times 14.3 \times 86\,400$ $\approx$ 4077216



1.2.6 · Lecture de t_1 pour $A = A_0/10$

2.1 Donner la définition de l'énergie de liaison E_l d'un noyau.

L'énergie de liaison E_l d'un noyau est l'énergie qu'il faut fournir à ce noyau, pris au repos, pour le séparer en ses nucléons isolés et immobiles.

COMPRENDRE
C'est une énergie reçue par le noyau, donc positive. Plus elle est grande, plus il est difficile de dissocier le noyau.

2.2 Exprimer le défaut de masse Δm d'un noyau en fonction de A, Z, m_p, m_n et $m(^{30}\mathrm{P})$. Le calculer pour le phosphore 30, en kg.

Données utiles $m_p = 1{,}007\,28$ u ; $m_n = 1{,}008\,66$ u ; $m(^{30}\mathrm{P}) = 29{,}970\,06$ u ; $1\ \mathrm{u} = 1{,}660\,5 \times 10^{-27}$ kg

Le défaut de masse est l'écart entre la masse des nucléons séparés et la masse du noyau :

$$\Delta m = Z\,m_p + (A - Z)\,m_n - m(^{30}\mathrm{P})$$

Pour le phosphore 30, $Z = 15$ et $A - Z = 15$:

$$\Delta m = 15 \times 1{,}007\,28 + 15 \times 1{,}008\,66 - 29{,}970\,06 = 0{,}269\,04\ \mathrm{u}$$

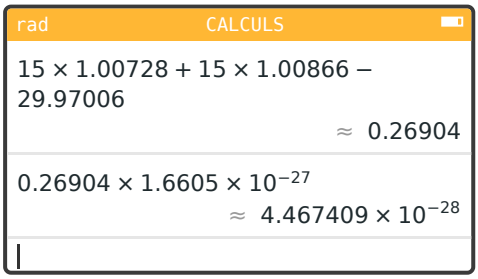
$$\Delta m = 0{,}269\,04 \times 1{,}660\,5 \times 10^{-27} = 4{,}467\,4 \times 10^{-28}\ \mathrm{kg}$$

$$\Delta m = 0{,}269\,04\ \mathrm{u} = 4{,}467\,4 \times 10^{-28}\ \mathrm{kg}$$

PIÈGE
Arrondir les masses avant de soustraire fait disparaître le résultat : la différence ne représente que 0,9 % de la masse du noyau. On garde toutes les décimales.

COMPRENDRE
Le défaut de masse est positif : le noyau est plus léger que ses nucléons séparés. Cinq chiffres significatifs ici, comme la valeur de l'unité de masse atomique.

À LA CALCULATRICE



2.3.1 Quelle relation lie l'énergie de liaison et le défaut de masse ? Calculer l'énergie de liaison du phosphore 30 en joule puis en MeV, et en déduire l'énergie de liaison par nucléon.

Données utiles Δm (2.2) ; $c = 2{,}997\,92 \times 10^{8}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $1\ \text{eV} = 1{,}602\,18 \times 10^{-19}\ \text{J}$

Relation d'équivalence masse-énergie : $E_l = \Delta m \times c^2$, avec Δm en kg et E_l en J.

$$E_l = 4{,}467\,4 \times 10^{-28} \times (2{,}997\,92 \times 10^{8})^2 = 4{,}015\,1 \times 10^{-11}\ \text{J}$$

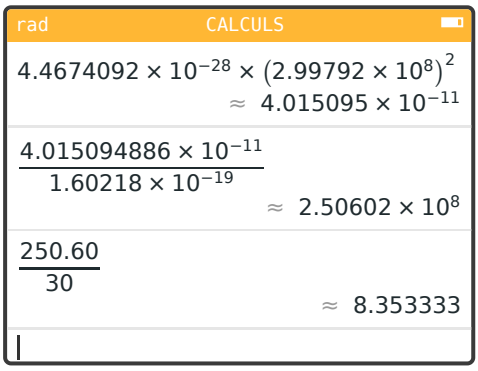
En électron-volts : $E_l = \dfrac{4{,}015\,1 \times 10^{-11}}{1{,}602\,18 \times 10^{-19}} = 2{,}506\,0 \times 10^{8}\ \text{eV} = 250{,}60\ \text{MeV}$

Le noyau contient $A = 30$ nucléons : $\dfrac{E_l}{A} = \dfrac{250{,}60}{30} = 8{,}353\ \text{MeV/nucléon}$

$E_l = 4{,}015\,1 \times 10^{-11}\ \text{J} = 250{,}60\ \text{MeV}$ et $\dfrac{E_l}{A} = 8{,}353$ MeV/nucléon

PIÈGE
Oublier le carré de c, ou laisser Δm en unité de masse atomique. Pour passer en MeV, on divise par $1{,}602\,18 \times 10^{-19}$ puis par 10^6.

À LA CALCULATRICE



2.3.2 Comparer cette valeur à l'énergie de liaison par nucléon du phosphore 31. Conclure.

Données utiles $\dfrac{E_l}{A}(^{31}\text{P}) = 8{,}48$ MeV/nucléon ; $\dfrac{E_l}{A}(^{30}\text{P}) = 8{,}353$ MeV/nucléon (2.3.1)

$8{,}35 < 8{,}48$: l'énergie de liaison par nucléon du phosphore 30 est inférieure à celle du phosphore 31.

Un noyau est d'autant plus stable que son énergie de liaison par nucléon est grande.

Le phosphore 31 est plus stable que le phosphore 30, ce qui s'accorde avec le sujet : le phosphore 31 est l'isotope présent dans la nature, le phosphore 30 est radioactif.

PIÈGE
La stabilité se compare avec l'énergie de liaison par nucléon, jamais avec l'énergie de liaison totale, qui augmente simplement avec le nombre de nucléons.