Les oscillations dans le haut-parleur

Bac S 2010 Nouvelle-Calédonie rattrapage (ancien programme) · Exercice 2 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le solide S à la date t et les représenter sur un schéma simplifié, sans souci d'échelle.

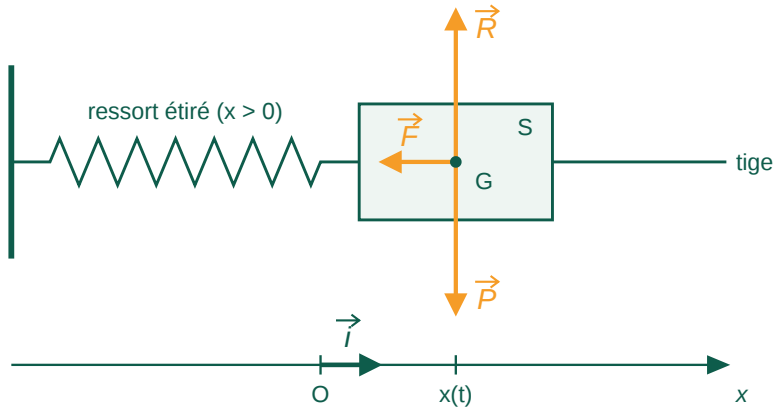
Système {solide S}, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Trois forces s'exercent sur lui :

- son poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la réaction $\vec{R}$ de la tige, verticale et vers le haut puisqu'il n'y a pas de frottement ;
- la force de rappel $\vec{F}$ du ressort, horizontale, dirigée vers la position d'équilibre O.

Forces : poids $\vec{P}$, réaction $\vec{R}$ de la tige, force de rappel $\vec{F}$ du ressort (schéma ci-contre).

PIÈGE
Orienter $\vec{F}$ dans le sens du déplacement.
Ressort étiré ($x > 0$) : il tire le solide vers O.
Ressort comprimé ($x < 0$) : il le repousse vers O.

COMPRENDRE
Le solide ne bouge pas verticalement : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ se compensent et sont tracés avec la même longueur. Seule $\vec{F}$ agit sur le mouvement.



1.1 · Les trois forces appliquées au solide S, représentées en G (cas $x > 0$)

1.2 Écrire l'expression vectorielle de la force de rappel $\vec{F}$ du ressort en fonction de l'abscisse x.

L'origine O est la position de G à l'équilibre : l'allongement du ressort est égal à x. La force de rappel est proportionnelle à cet allongement et de sens opposé.

$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$$

COMPRENDRE
Le signe « $-$ » traduit le rappel : si $x > 0$, la force est selon $-\vec{i}$; si $x < 0$, elle est selon $+\vec{i}$.

1.3 En appliquant la deuxième loi de Newton au solide, vérifier que l'équation différentielle du mouvement s'écrit $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$.

Deuxième loi de Newton appliquée au solide S, de masse m constante, dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont perpendiculaires à l'axe : leur projection sur $(O, \vec{i})$ est nulle. Avec $a_x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, la projection donne :

$$-k\,x = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

On divise par m et on regroupe dans le même membre :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, loi vectorielle, puis projection sur l'axe du mouvement. La projection ne s'écrit qu'après la relation vectorielle.

1.4 Une solution est $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$. Montrer que la période propre vaut $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

On dérive deux fois la solution proposée :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -X_m\,\frac{2\pi}{T_0}\,\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -X_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x$$

On reporte dans l'équation différentielle :

$$\left[\frac{k}{m} - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\right]x = 0$$

Cette égalité doit être vraie à chaque instant, donc $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{k}{m}$, soit $T_0^2 = 4\pi^2\,\frac{m}{k}$.

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

PIÈGE
Oublier le facteur $\frac{2\pi}{T_0}$ qui sort à chaque dérivation : il apparaît donc au carré dans la dérivée seconde.

1.5 Par une analyse dimensionnelle, vérifier l'homogénéité de l'expression de la période propre T_0.

Dimension de k : d'après $F = k\,|x|$, $k = \frac{F}{|x|}$. Une force est une masse multipliée par une accélération : $[F] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$.

$$[k] = \frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{L}} = \mathrm{M}\cdot\mathrm{T}^{-2}$$

2π est sans dimension, donc :

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}\cdot\mathrm{T}^{-2}}\right)^{1/2} = \left(\mathrm{T}^2\right)^{1/2} = \mathrm{T}$$

$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ a la dimension d'un temps : l'expression de T_0 est homogène.

MÉTHODE
Pour la dimension d'une grandeur inconnue, partir d'une relation simple qui la contient (ici $F = k\,|x|$), puis tout ramener à M, L et T.

2.1 Quelle est la nature des oscillations observées et quel est le nom du régime associé ?

Après le coup donné sur le dôme, l'équipage mobile est abandonné à lui-même : les oscillations sont libres. Leur amplitude décroît au cours du temps : elles sont amorties.

Oscillations libres amorties ; le régime est **pseudo-périodique**.

COMPRENDRE
« Pseudo » car le mouvement ne se reproduit pas identique à lui-même : l'amplitude change, mais la durée entre deux passages successifs par zéro dans le même sens reste constante.

2.2 Interpréter l'évolution temporelle de l'amplitude des oscillations.

L'amplitude diminue à chaque oscillation. L'équipage mobile est soumis à des frottements (air sur la membrane, suspension) qui dissipent peu à peu son énergie mécanique sous forme de chaleur.

L'amplitude décroît à cause des frottements, qui dissipent l'énergie mécanique de l'oscillateur.

2.3 Déterminer la valeur de la pseudo-période T des oscillations et en déduire, pour un amortissement faible, la fréquence propre f_0 de l'équipage mobile.

Données utiles figure 3 : axe des temps gradué de 0 à 0,30 s

Sur la figure 3, on compte 5 pseudo-périodes entre $t = 0$ et $t = 0{,}10$ s :

$$T = \frac{0{,}10}{5} = 0{,}020 \text{ s}$$

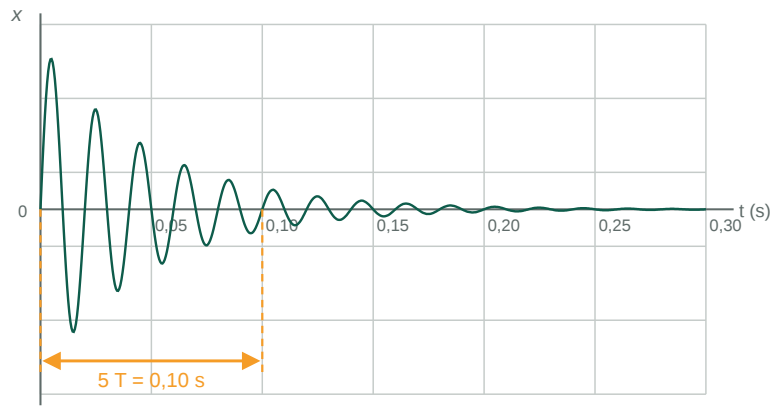
L'amortissement étant faible, la pseudo-période est pratiquement égale à la période propre : $T_0 \approx T$.

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0{,}020}$$

$T = 0{,}020$ s et $f_0 = 50$ Hz

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, c'est ce que permet la lecture graphique. La valeur de 50 Hz convient à un haut-parleur de graves.

MÉTHODE
Mesurer plusieurs pseudo-périodes puis diviser : l'erreur de lecture est répartie. Sans calculatrice : $\frac{1}{0{,}020} = \frac{100}{2} = 50$.



2.3 · Figure 3 du sujet (allure) : cinq pseudo-périodes entre $t = 0$ et $t = 0{,}10$ s

2.4.1 Avec la masse additionnelle m', exprimer la fréquence propre f_0' en fonction de m, m' et k.

Le ressort est inchangé (même k) et la masse qui oscille devient $m + m'$. La période propre s'écrit $T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{m+m'}{k}}$, et $f_0' = \frac{1}{T_0'}$.

$$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+m'}}$$

2.4.2 En comparant les expressions littérales de f_0 et f_0', montrer que $m = \dfrac{m'}{\left(\dfrac{f_0}{f_0'}\right)^2 - 1}$.

Données utiles f_0' (2.4.1)

Sans masse additionnelle : $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. On forme le rapport des deux fréquences, puis on élève au carré : k et 2π disparaissent.

$$\left(\frac{f_0}{f_0'}\right)^2 = \frac{k}{m} \times \frac{m+m'}{k} = \frac{m+m'}{m} = 1 + \frac{m'}{m}$$

D'où $\dfrac{m'}{m} = \left(\dfrac{f_0}{f_0'}\right)^2 - 1$, et finalement :

$$m = \frac{m'}{\left(\dfrac{f_0}{f_0'}\right)^2 - 1}$$, qui est bien l'expression attendue.

PIÈGE
Inverser le rapport. Ajouter de la masse ralentit l'oscillateur : $f_0' < f_0$, donc $\dfrac{f_0}{f_0'} > 1$ et le dénominateur est bien positif.

COMPRENDRE
Vérification numérique : $\left(\dfrac{50}{45}\right)^2 = \dfrac{100}{81}$, donc $m = 10 \times \dfrac{81}{19} \approx 43$ g, que le sujet arrondit à 40 g.

2.5 Exprimer la constante de raideur k en fonction de la fréquence propre f_0 de l'équipage mobile. En déduire la valeur de k.

Données utiles $m = 40$ g ; $f_0 = 50$ Hz (2.3) ; aide au calcul : $\pi^2 \approx 10$

$f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ donne, en élevant au carré, $f_0^2 = \dfrac{k}{4\pi^2 m}$, soit :

$$k = 4\pi^2 m f_0^2$$

Avec $m = 40 \times 10^{-3}$ kg :

$$k = 4 \times 10 \times 40 \times 10^{-3} \times 50^2 = 1{,}6 \times 2\,500$$

$$k = 4\pi^2 m f_0^2 = 4{,}0 \times 10^3 \ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

PIÈGE
Laisser la masse en grammes : le résultat serait mille fois trop grand. Dans $k = 4\pi^2 m f_0^2$, la masse est en kilogrammes.

COMPRENDRE
L'unité $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ est équivalente à $\mathrm{kg \cdot s^{-2}}$, ce qui rejoint la dimension $\mathrm{M \cdot T^{-2}}$ trouvée à la question 1.5.

2.6.1 Un GBF impose au haut-parleur un signal sinusoïdal de fréquence f. À quel type d'oscillations est soumis l'équipage mobile ? Identifier le résonateur et l'excitateur.

Le GBF impose sa fréquence f à l'équipage mobile, qui n'oscille plus à sa fréquence propre : les oscillations sont forcées.

Oscillations **forcées** ; excitateur : le GBF ; résonateur : l'équipage mobile du haut-parleur.

COMPRENDRE
L'excitateur fournit l'énergie et fixe la fréquence. Le résonateur la subit : il oscille à la fréquence f, avec une amplitude qui dépend de l'écart entre f et f_0.

2.6.2 L'amortissement étant suffisamment faible, qu'observe-t-on lorsque f est voisine de f_0 ? Quel est le nom de ce phénomène ?

Lorsque la fréquence f imposée par le GBF s'approche de la fréquence propre $f_0 = 50$ Hz, l'amplitude des oscillations de l'équipage mobile devient très grande : elle passe par un maximum.

L'amplitude des oscillations est maximale pour $f \approx f_0$: c'est la **résonance**.

PIÈGE
Dire que « la fréquence augmente » : à la résonance, c'est l'amplitude qui devient maximale. La fréquence des oscillations reste celle du GBF.