Condensateur et éclairage d'un train miniature

Bac S 2010 Nouvelle-Calédonie (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Répondre qualitativement : a. pendant la charge du condensateur, les lampes sont-elles parcourues par un courant ? b. une fois le condensateur totalement chargé, un courant circule-t-il dans la branche AB qui le contient ?

a. La branche des lampes est reliée directement aux points P et N, donc aux bornes de l'alimentation : elle forme avec elle un circuit fermé. Les lampes sont traversées par un courant dès que le contact roues/rails est établi, que le condensateur soit chargé ou non.

b. Dans la branche AB, $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Condensateur chargé : u_C ne varie plus, donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$.

a. Oui, les lampes sont parcourues par un courant. b. Non, l'intensité est nulle dans la branche AB.

COMPRENDRE
Les trois branches (lampes, condensateur et R_0, alimentation) sont en dérivation entre les mêmes points. La tension aux bornes des lampes vaut E en permanence : la charge du condensateur ne modifie pas leur éclat.

1.1.2 Déterminer, en justifiant, la tension aux bornes du condensateur lorsqu'il est complètement chargé.

Données utiles $E = 12$ V

Loi des mailles dans la maille formée par l'alimentation et la branche AB : $E = u_{R_0} + u_C$.

Loi d'Ohm : $u_{R_0} = R_0\, i$. Condensateur chargé : $i = 0$ (question 1.1.1), donc $u_{R_0} = 0$.

$u_C = E = 12$ V

PIÈGE
Affirmer « $u_C = E$ » sans justification ne rapporte pas tous les points : il faut la loi des mailles et l'argument $i = 0$, qui annule la tension aux bornes de R_0.

1.1.3 Estimer l'ordre de grandeur du temps de charge du condensateur à l'aide de la constante de temps τ du dipôle (R_0, C).

Données utiles $R_0 = 10\ \Omega$; $C = 1000\ \mu$F

$\tau = R_0\, C = 10 \times 1000 \times 10^{-6} = 1{,}0 \times 10^{-2}$ s

Le condensateur est chargé à plus de 99 % au bout d'une durée 5τ :

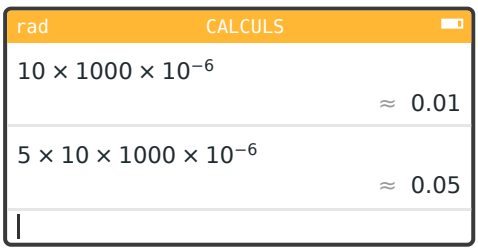
$5\tau = 5 \times 1{,}0 \times 10^{-2} = 5{,}0 \times 10^{-2}$ s

$\tau = 1{,}0 \times 10^{-2}$ s ; la charge dure environ $5\tau = 5{,}0 \times 10^{-2}$ s, soit quelques centièmes de seconde.

PIÈGE
La capacité est donnée en microfarads : $1000\ \mu\text{F} = 1{,}000 \times 10^{-3}$ F. Seule la résistance R_0 intervient dans la charge : les lampes sont dans une autre branche.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme R_0 et E. La charge est plus brève que la durée d'un soubresaut (0,10 s) : entre deux pertes de contact, le condensateur a le temps de se recharger.

À LA CALCULATRICE



1.2.1 Montrer que, pendant le soubresaut, la tension u_C vérifie l'équation différentielle $u_C + (2R + R_0)\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$.

Le circuit de la figure 4 est une seule maille. Loi des mailles : $u_C + u_{R_0} + u_1 + u_2 = 0$.

Les flèches des tensions u_{R_0}, u_1 et u_2 sont opposées au sens choisi pour i (convention récepteur). Loi d'Ohm : $u_{R_0} = R_0\,i$ et $u_1 = u_2 = R\,i$.

Donc $u_C + (2R + R_0)\,i = 0$.

Le courant i arrive sur l'armature qui porte la charge q : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ avec $q = C\,u_C$ et C constante, soit $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

$$u_C + (2R + R_0)\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

PIÈGE
Oublier une des deux lampes (le coefficient est $2R$), ou écrire la loi d'Ohm sans regarder le sens des flèches : un signe faux donne une équation sans solution décroissante.

MÉTHODE
Circuit RC : 1) loi des mailles avec les flèches du schéma ; 2) loi d'Ohm pour chaque conducteur ohmique ; 3) $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$; 4) tout exprimer en fonction de u_C.

1.2.2 Vérifier que $u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{(2R+R_0)C}}$ est solution de l'équation différentielle précédente et déterminer la valeur de A.

Données utiles $u_C(t=0) = E = 12$ V

On pose $\tau' = (2R + R_0)\,C$, d'où $u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau'}$.

Dérivée : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A}{\tau'}\,\mathrm{e}^{-t/\tau'}$

On remplace dans le premier membre de l'équation :

$$A\,\mathrm{e}^{-t/\tau'} + \tau' \times \left(-\frac{A}{\tau'}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau'} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau'} - A\,\mathrm{e}^{-t/\tau'} = 0$$

L'égalité est vérifiée à tout instant : la fonction proposée est solution.

Condition initiale : $u_C(0) = A\,\mathrm{e}^0 = A$ et $u_C(0) = E$.

$A = E = 12$ V, soit $u_C(t) = E\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{(2R+R_0)C}}$

COMPRENDRE
La constante de temps de la décharge vaut $\tau' = 210 \times 1{,}000 \times 10^{-3} = 0{,}21$ s, vingt et une fois celle de la charge : le condensateur se charge vite à travers R_0 seule et se décharge lentement dans les lampes.

1.2.3 Donner l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant. En déduire le signe de $i(t)$.

$$i = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = C \times \left(-\frac{E}{(2R + R_0)\,C}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{(2R+R_0)C}}$$

E, R et R_0 sont positifs et une exponentielle est toujours positive.

$i(t) = -\dfrac{E}{2R + R_0}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{(2R+R_0)C}}$: l'intensité est négative à tout instant.

COMPRENDRE
Un signe négatif signifie que le courant circule réellement dans le sens opposé à la flèche de la figure 4 : la charge q diminue, le condensateur se décharge et joue le rôle de générateur pour les lampes.

1.2.4 Sachant que $p(t) = R\,i^2(t)$, choisir en justifiant, parmi les figures 5, 6 et 7 de l'annexe, la seule qui peut représenter l'évolution de la puissance consommée par chaque lampe pendant la décharge.

Données utiles $E = 12$ V ; $R = 100\ \Omega$; $R_0 = 10\ \Omega$; $i(t)$ (1.2.3)

$$p(t) = R\,i^2(t) = R\left(\frac{E}{2R+R_0}\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{2t}{(2R+R_0)C}}$$

La puissance est une fonction exponentielle décroissante du temps, qui tend vers 0 :

- la figure 7 est écartée : la courbe est croissante ;
- la figure 5 est écartée : la décroissance est linéaire, et non exponentielle.

Vérification à $t = 0$: $p(0) = R\left(\frac{E}{2R+R_0}\right)^2 = 100 \times \left(\frac{12}{210}\right)^2 = 0{,}33$ W, valeur lue à l'origine sur la figure 6.

La figure 6 est la seule qui convient.

PIÈGE

Le carré s'applique aussi à l'exponentielle : $\left(\mathrm{e}^{-t/\tau'}\right)^2 = \mathrm{e}^{-2t/\tau'}$. La puissance décroît donc deux fois plus vite que l'intensité.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$100 \times \left(\frac{12}{210}\right)^2$

≈ 0.3265306

1.2.5 L'éclairement est satisfaisant si la puissance consommée est au moins égale à 75 % de P_0. a. Déterminer graphiquement la durée d'éclairement satisfaisant de chaque lampe. b. Les lampes éclairent-elles de façon satisfaisante pendant toute la durée du soubresaut ?

Données utiles $P_0 = 0{,}36$ W ; $\Delta t_{\text{soubresaut}} = 0{,}10$ s ; figure 6 (1.2.4)

a. Puissance minimale pour un éclairement satisfaisant : $0{,}75 \times P_0 = 0{,}75 \times 0{,}36 = 0{,}27$ W.

Sur la figure 6, on trace la droite horizontale d'ordonnée $p = 0{,}27$ W ; elle coupe la courbe en un point dont on lit l'abscisse : $t \approx 0{,}02$ s.
Avant cet instant, $p \geqslant 0{,}27$ W.

b. $0{,}02$ s $< 0{,}10$ s : la durée d'éclairement satisfaisant est environ cinq fois plus courte que le soubresaut.

a. Durée d'éclairement satisfaisant : environ $0{,}02$ s. b. Non, les lampes n'éclairent pas correctement pendant tout le soubresaut.

COMPRENDRE

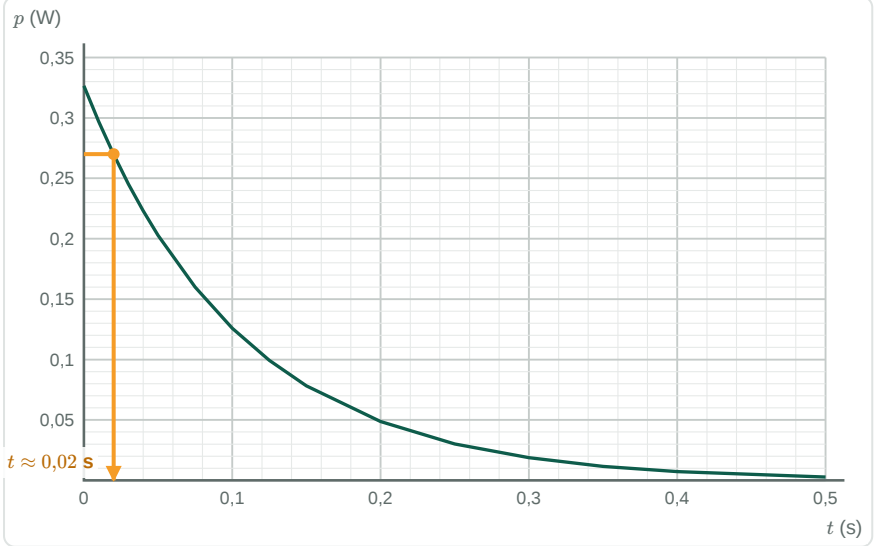
La courbe part de 0,33 W, sous la puissance optimale P_0 : l'éclairement n'est jamais optimal pendant le soubresaut. La pente étant forte au début, la lecture est peu précise : une valeur comprise entre 0,02 s et 0,03 s est acceptable.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

0.75×0.36

≈ 0.27



1.2.5 · Figure 6 de l'annexe, avec la lecture de la durée d'éclairement satisfaisant (droite $p = 0{,}27$ W)

2.1 Montrer par une analyse dimensionnelle que $\Delta t = (R_3 + R_0)\,C\,\ln\left(\dfrac{I_{\max}}{I_{\text{seuil}}}\right)$ a bien la dimension d'un temps.

Le rapport $\dfrac{I_{\max}}{I_{\text{seuil}}}$ de deux intensités est sans dimension, son logarithme aussi. Donc $[\Delta t] = [R]\,[C]$.

Loi d'Ohm $u = R\,i$: $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$. Relation $q = C\,u_C$: $[C] = \dfrac{[Q]}{[U]}$.

$$[\Delta t] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[Q]}{[I]}$$

Or $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, donc $[Q] = [I]\,\mathrm{T}$.

$[\Delta t] = \dfrac{[I]\,\mathrm{T}}{[I]} = \mathrm{T}$: Δt a la dimension d'un temps.

MÉTHODE
Pour la dimension d'un produit RC : remplacer chaque grandeur à l'aide d'une relation connue ($u = R\,i$, $q = C\,u$, $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$) jusqu'à ne garder que des tensions, des intensités et des temps, puis simplifier.

2.2 Calculer Δt et indiquer si les diodes électroluminescentes éclairent pendant toute la durée du soubresaut.

Données utiles $R_3 = 1{,}5\ \text{k}\Omega$; $R_0 = 10\ \Omega$; $C = 1000\ \mu\text{F}$; $I_{\max} = 6{,}0\ \text{mA}$; $I_{\text{seuil}} = 2{,}0\ \text{mA}$; $\Delta t_{\text{soubresaut}} = 0{,}10\ \text{s}$

$$\Delta t = (R_3 + R_0)\,C\,\ln\left(\frac{I_{\max}}{I_{\text{seuil}}}\right)$$

$$\Delta t = (1{,}5 \times 10^3 + 10) \times 1000 \times 10^{-6} \times \ln\left(\frac{6{,}0}{2{,}0}\right) = 1{,}7\ \text{s}$$

$1{,}7\ \text{s} > 0{,}10\ \text{s}$: l'intensité reste supérieure à I_{seuil} pendant tout le soubresaut.

$\Delta t = 1{,}7\ \text{s}$: les diodes éclairent pendant toute la durée du soubresaut.

PIÈGE
Convertir R_3 en ohms et C en farads. Les intensités peuvent rester en milliampères : seul leur rapport intervient.

COMPRENDRE
La durée d'éclairement est dix-sept fois plus longue que le soubresaut : avec une résistance de 1,5 kΩ, le condensateur se décharge beaucoup plus lentement que dans les lampes.

À LA CALCULATRICE

