Détection de métaux

Bac S 2010 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 4 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1.1 Expliquer pourquoi l'évolution de la tension u_R aux bornes du conducteur ohmique représente celle de l'intensité i du courant dans le circuit.

Loi d'Ohm pour le conducteur ohmique, en convention récepteur (figure 1) : $u_R = R\,i$.

R est une constante : u_R et i sont proportionnelles.

$i = \dfrac{u_R}{R}$: la courbe $u_R(t)$ donne celle de $i(t)$ à un facteur constant près.

COMPRENDRE
Le dipôle RL et le circuit LC ne figurent plus au programme actuel de spécialité, qui n'étudie que le dipôle RC. Les méthodes (constante de temps, équation différentielle, analyse dimensionnelle) restent les mêmes.

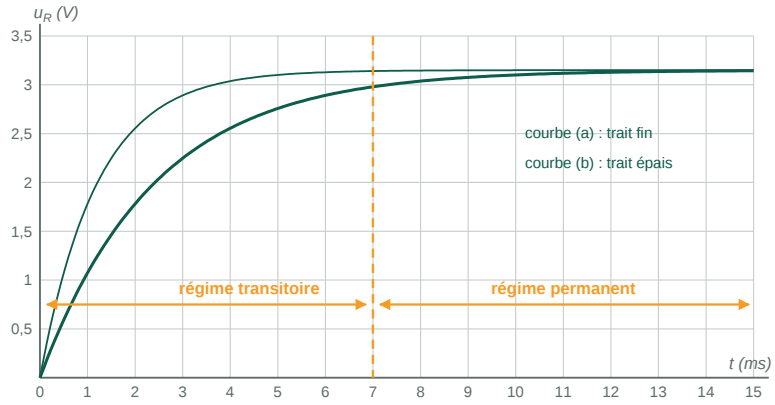
1.1.2 Repérer sur la courbe (a) de la figure 2 le régime transitoire et le régime permanent. Expliquer qualitativement le phénomène observé pour l'intensité.

Sur la courbe (a), u_R augmente jusqu'à $t \approx 7$ ms : c'est le régime transitoire. Ensuite u_R garde une valeur constante, proche de 3,15 V : c'est le régime permanent (voir l'annexe complétée).

L'intensité ne prend pas instantanément sa valeur finale à la fermeture de l'interrupteur : la bobine s'oppose aux variations de l'intensité du courant qui la traverse.

La bobine retarde l'établissement du courant dans le circuit.

PIÈGE
Dire que la bobine « s'oppose au courant ». Elle s'oppose à ses variations : une fois l'intensité constante, elle se comporte comme un simple conducteur ohmique de résistance r.



1.1.2 · Annexe complétée (figure 2) : les deux régimes sur la courbe (a)

1.1.3 Comment évolue l'intensité du courant dans chaque régime ?

Comme $i = \dfrac{u_R}{R}$, l'intensité varie comme u_R.

Régime transitoire : i augmente à partir de zéro, de moins en moins vite. Régime permanent : i est constante.

1.1.4 Donner l'expression de la tension u_B aux bornes de la bobine. Que devient cette expression quand le régime permanent est atteint ?

Bobine d'inductance L et de résistance r, en convention récepteur :

$$u_B = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + r\,i$$

En régime permanent, i est constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$.

En régime permanent : $u_B = r\,i$

PIÈGE
Oublier le terme $r\,i$. La bobine du montage n'est pas idéale : le sujet donne $r = 5{,}0\ \Omega$.

1.2.1 a. Montrer par une analyse dimensionnelle que $\tau = \dfrac{L}{R+r}$ est homogène à un temps. b. Déterminer graphiquement les constantes de temps τ_a et τ_b des courbes (a) et (b).

Données utiles figure 2 : valeur finale de u_R proche de 3,15 V pour les deux courbes

a. Loi d'Ohm $u = R\,i$: $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$, et de même pour r.

Bobine idéale $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$: $[U] = [L]\dfrac{[I]}{[T]}$, donc $[L] = \dfrac{[U]\,[T]}{[I]}$.

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[U]\,[T]}{[I]} \times \frac{[I]}{[U]} = [T]$$

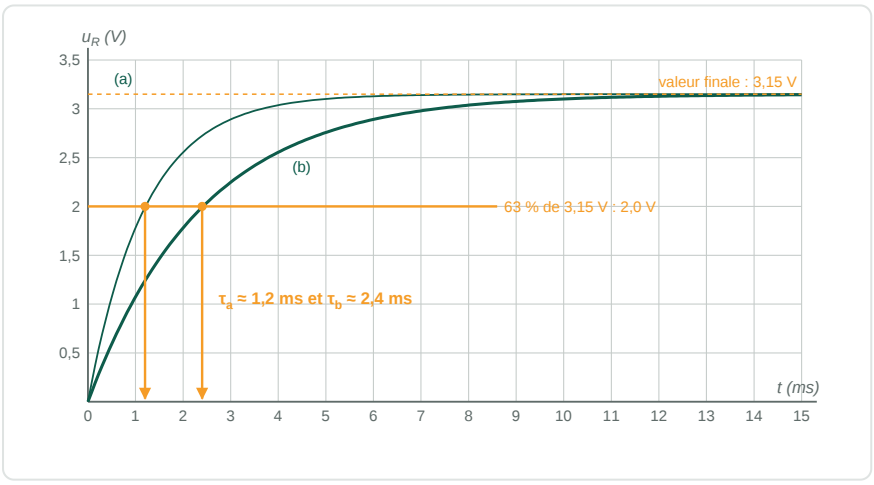
τ a bien la dimension d'un temps.

b. À $t = \tau$, la tension atteint 63 % de sa valeur finale : $0{,}63 \times 3{,}15 \approx 2{,}0$ V. On trace l'horizontale $u_R = 2{,}0$ V et on lit l'abscisse de son intersection avec chaque courbe.

$\tau_a \approx 1{,}2$ ms et $\tau_b \approx 2{,}4$ ms

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs au plus : une lecture graphique ne permet pas mieux. Sans calculatrice, $0{,}63 \times 3{,}15 \approx 0{,}63 \times 3{,}2 \approx 2{,}0$.

MÉTHODE
Autre méthode : tracer la tangente à l'origine ; elle coupe l'asymptote horizontale à $t = \tau$. La lecture à 63 % est plus précise, car une tangente se trace mal à la main.



1.2.1 · Figure 2 : lecture des constantes de temps à 63 % de la valeur finale

1.2.2 Comparer les inductances L_a et L_b de la bobine en l'absence puis en présence de fer. L'information donnée dans le texte à propos du fer est-elle vérifiée ?

Données utiles $\tau_a \approx 1{,}2$ ms et $\tau_b \approx 2{,}4$ ms (1.2.1)

$\tau = \dfrac{L}{R+r}$ donne $L = \tau\,(R+r)$. Les résistances R et r sont les mêmes dans les deux expériences, donc L est proportionnelle à τ :

$$\frac{L_b}{L_a} = \frac{\tau_b}{\tau_a} = \frac{2{,}4}{1{,}2} = 2{,}0$$

$L_b \approx 2\,L_a$: l'inductance augmente quand on approche du fer, l'information du texte est vérifiée.

COMPRENDRE
Vérification : $L_a = \tau_a\,(R+r) = 1{,}2 \times 10^{-3} \times 15 = 1{,}8 \times 10^{-2}$ H, soit 18 mH, proche des 20 mH indiqués sur la bobine.

2.1 Donner l'expression de la tension u_L en fonction de L et i.

La bobine est idéale (résistance nulle) et, sur la figure 3, la flèche de u_L est opposée au sens de i : convention récepteur.

$$u_L = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

2.2 Donner l'expression de l'intensité i du courant en fonction de C et u_C.

Le courant arrive sur l'armature qui porte la charge q : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

Or $q = C\,u_C$, avec C constante.

$$i = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

PIÈGE
Le signe dépend de l'orientation. Si i s'éloignait de l'armature portant q, on aurait $i = -\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$: toujours regarder la figure avant d'écrire la relation.

2.3 En appliquant la loi d'additivité des tensions, établir l'équation différentielle satisfaite par u_C.

Loi d'additivité des tensions dans la maille de la figure 3 : $u_C + u_L = 0$.

Avec $u_L = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$: $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C\,\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$, donc $u_C + L\,C\,\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

En divisant par $L\,C$:

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{L\,C}\,u_C = 0$$

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : 1) loi des mailles ; 2) remplacer chaque tension par son expression ; 3) tout exprimer avec la seule grandeur demandée ; 4) mettre le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé à 1.

2.4 L'équation différentielle est de la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\,u_C = 0$. Exprimer la période propre T_0 en fonction de L et C.

Par identification des coefficients de u_C dans les deux écritures :

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{1}{L\,C} \quad \text{soit} \quad T_0^2 = 4\pi^2\,L\,C$$

Une période est positive :

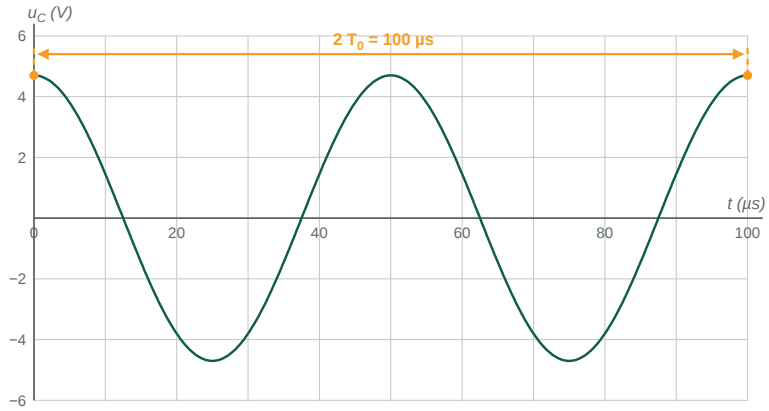
$$T_0 = 2\pi\sqrt{L\,C}$$

2.5 Déterminer graphiquement la période propre T_0 de l'oscillateur en l'absence de métal (figure 4).

Sur la figure 4, u_C est maximale à $t = 0$ puis de nouveau à $t = 100\ \mu$s, deux périodes plus tard : $2\,T_0 = 100\ \mu$s.

$T_0 = 50\ \mu\text{s} = 5{,}0 \times 10^{-5}$ s

MÉTHODE
Mesurer la durée de plusieurs périodes entre deux points faciles à repérer (ici deux maximums placés sur le quadrillage), puis diviser : l'erreur de lecture est divisée d'autant.



2.5 · Figure 4 : deux périodes entre les maximums de $t = 0$ et $t = 100\ \mu$s

2.6 En l'absence de métal, l'inductance de la bobine vaut 20 mH. En déduire la valeur de la capacité C utilisée dans l'oscillateur.

Données utiles $T_0 = 5{,}0 \times 10^{-5}$ s (2.5) ; $L = 20$ mH ; aide aux calculs : $\pi^2 = 10$; $\dfrac{25}{8} = 3{,}1$

De $T_0^2 = 4\pi^2\,L\,C$ (2.4) :

$$C = \frac{T_0^2}{4\pi^2\,L} = \frac{(5{,}0 \times 10^{-5})^2}{4 \times 10 \times 20 \times 10^{-3}} = \frac{25 \times 10^{-10}}{8{,}0 \times 10^{-1}} = \frac{25}{8} \times 10^{-9}\ \text{F}$$

$C = 3{,}1 \times 10^{-9}$ F, soit 3,1 nF

PIÈGE
Laisser L en millihenrys ou T_0 en microsecondes : il faut $L = 20 \times 10^{-3}$ H et $T_0 = 5{,}0 \times 10^{-5}$ s. Ne pas oublier non plus d'élever T_0 au carré.

COMPRENDRE
Sans calculatrice, on regroupe les puissances de dix à part et on utilise l'aide aux calculs. Deux chiffres significatifs, comme T_0 et L.

3.1 La fréquence propre $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L\,C}}$ est voisine de 20 kHz en l'absence de métal. Comment évolue-t-elle si on approche de la bobine un objet en or ?

Près d'un objet en or, l'inductance L diminue. La capacité C ne change pas, donc $\sqrt{L\,C}$ diminue. Or f_0 est inversement proportionnelle à $\sqrt{L\,C}$.

La fréquence propre augmente : elle devient supérieure à 20 kHz.

COMPRENDRE
Cohérence avec la partie 2 : $f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{5{,}0 \times 10^{-5}} = 2{,}0 \times 10^4$ Hz, soit bien 20 kHz en l'absence de métal.

3.2 Sur la plage, Léo et Julie détectent un signal de fréquence égale à 15 kHz. Ont-ils trouvé de l'or ? Justifier.

La fréquence mesurée, 15 kHz, est inférieure à la fréquence propre sans métal, 20 kHz : la fréquence a diminué, donc $\sqrt{L\,C}$ a augmenté. Comme C est constante, l'inductance L a augmenté.

Or l'inductance diminue à l'approche de l'or et augmente à l'approche du fer.

Ils n'ont pas trouvé d'or : l'objet détecté est en un métal qui augmente l'inductance, comme le fer.

PIÈGE

S'arrêter à « la fréquence a changé, donc il y a du métal ». La question porte sur la nature du métal : c'est le sens de variation de f_0 qui permet de trancher.