La nuit du 21 juin 1822

Bac S 2010 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Définir une onde mécanique, puis préciser ce que signifie le caractère longitudinal de l'onde sonore.

Une onde mécanique est la propagation d'une perturbation dans un milieu matériel. Elle transporte de l'énergie, mais pas de matière.

L'onde sonore est longitudinale : les tranches d'air se déplacent, au passage de l'onde, selon la direction dans laquelle l'onde se propage.

> Onde mécanique : perturbation qui se propage dans un milieu matériel, sans transport de matière. Longitudinale : perturbation parallèle à la direction de propagation.

PIÈGE
Oublier « milieu matériel » ou « sans transport de matière » : chacun de ces deux éléments est attendu dans la définition.

1.2 La célérité des ondes sonores produites par les deux canons opposés est-elle augmentée, diminuée ou inchangée lors de leur croisement ?

Deux ondes mécaniques qui se rencontrent se superposent, puis chacune poursuit sa propagation comme si l'autre n'existait pas.

> La célérité des deux ondes sonores est inchangée lors de leur croisement.

COMPRENDRE
C'est une différence essentielle avec deux objets matériels, qui se heurteraient. La célérité ne dépend que du milieu (ici l'air et sa température), pas de la présence d'une autre onde.

1.3 Calculer la célérité v_{exp} des ondes sonores à partir des mesures. D'après le texte, de quels paramètres dépend a priori la célérité du son pour les observateurs ?

Données utiles distance entre les canons : 9 549,6 toises ; 1 toise = 1,949 m ; durée moyenne $\Delta t = 54{,}6$ s ; aide au calcul : $9549{,}6 \times 1{,}9490 = 18612$ et $\dfrac{18612}{54{,}6} = 341$

Distance entre les deux stations : $d = 9549{,}6 \times 1{,}949 = 18\,612$ m.

Le son parcourt cette distance pendant la durée Δt :

$$v_{\text{exp}} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{18\,612}{54{,}6} = 341 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le texte relève la température de l'atmosphère et précise que les tirs sont réciproques pour que le vent ne fausse pas les résultats : pour les observateurs, la célérité du son dépend de la température de l'air et du vent.

> $v_{\text{exp}} = 341 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; paramètres : température de l'air et vent.

PIÈGE
Diviser les toises par 1,949 au lieu de multiplier : l'aide au calcul propose aussi $4899{,}7$ et $89{,}7$, qui sont des leurres. Une toise vaut près de 2 m, donc la distance en mètres est plus grande.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme la durée 54,6 s, la donnée la moins précise. Sans calculatrice, on choisit dans l'aide au calcul les lignes qui correspondent à la relation littérale posée.

1.4 Les observateurs déclenchent leur chronomètre à l'apparition de la lumière. Quelle durée négligent-ils ? Pourquoi est-ce raisonnable ?

Données utiles $c = 3{,}0 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $d = 18\,612$ m et $v_{\text{exp}} = 341\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (1.3)

Ils négligent la durée que met la lumière de l'explosion pour aller d'une station à l'autre.

La lumière est environ un million de fois plus rapide que le son : $\dfrac{c}{v_{\text{exp}}} \approx \dfrac{3 \times 10^8}{3 \times 10^2} = 10^6$.

Sa durée de trajet est donc un million de fois plus courte : $\dfrac{d}{c} \approx \dfrac{1{,}9 \times 10^4}{3{,}0 \times 10^8} \approx 6 \times 10^{-5}$ s, très inférieure à la précision des chronomètres.

Durée négligée : celle du trajet de la lumière, de l'ordre de 6×10^{-5} s, négligeable devant 54,6 s.

MÉTHODE
Pour justifier qu'une grandeur est négligeable, on la compare à l'autre par un rapport ou un ordre de grandeur chiffré ; écrire seulement « la lumière va très vite » ne suffit pas.

2.1 Donner, pour chacune des forces exercées sur le piston (poids, réaction du support, forces pressantes intérieure et extérieure), la nature de l'interaction : de contact ou à distance.

- Poids $\vec{P}$: action de la Terre sur le piston, interaction à distance.
- Réaction $\vec{R}$: action du tube sur le piston, interaction de contact.
- $\vec{F}_{\text{int}}$: action de l'air enfermé sur le piston, interaction de contact.
- $\vec{F}_{\text{ext}}$: action de l'air extérieur sur le piston, interaction de contact.

Seul le poids est une interaction à distance ; $\vec{R}$, $\vec{F}_{\text{int}}$ et $\vec{F}_{\text{ext}}$ sont des interactions de contact.

COMPRENDRE
Une force pressante résulte des chocs des molécules d'air sur la paroi : il y a bien contact entre le gaz et le piston.

2.2 L'ensemble des forces est équivalent à $\vec{F} = -kx\vec{i}$ avec $k > 0$. Pourquoi peut-on dire que cette force se comporte comme une force de rappel ?

Comme $k > 0$, la coordonnée $F_x = -kx$ est toujours de signe opposé à x :

- si $x > 0$, $\vec{F}$ est dirigée selon $-\vec{i}$;
- si $x < 0$, $\vec{F}$ est dirigée selon $+\vec{i}$.

Dans les deux cas, la force est dirigée vers O et tend à ramener le piston à sa position d'équilibre ; sa valeur $k\,|x|$ est proportionnelle à l'écart à cette position. C'est la même expression que celle de la force exercée par un ressort de raideur k.

$\vec{F}$ est toujours dirigée vers la position d'équilibre O, avec une valeur proportionnelle à l'écart $|x|$: c'est une force de rappel.

COMPRENDRE
Si le piston s'enfonce ($x < 0$), l'air enfermé est comprimé, sa pression dépasse P_0 et il repousse le piston. L'air joue le rôle du ressort.

2.3.1 Énoncer la deuxième loi de Newton.

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur un système de masse m constante est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G$$

PIÈGE
Ne pas préciser « dans un référentiel galiléen » : sans cette condition, l'énoncé de la loi est incomplet.

2.3.2 Déterminer l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G du piston, en projetant la deuxième loi de Newton sur l'axe (Ox).

Système {piston} de masse m ; référentiel terrestre supposé galiléen.

La somme des forces extérieures est équivalente à $\vec{F} = -kx\,\vec{i}$ (2.2).

La deuxième loi de Newton donne :

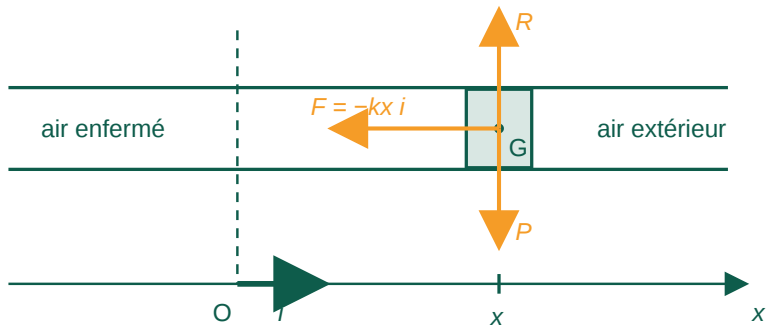
$$-kx\,\vec{i} = m\,\vec{a}_G$$

Sur l'axe (Ox), $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, donc $-kx = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

COMPRENDRE
Le poids et la réaction du tube sont verticaux et se compensent (pas de frottement, mouvement horizontal). Seul l'écart entre les deux forces pressantes agit selon (Ox).

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, loi vectorielle, puis projection sur l'axe. On termine en ramenant tous les termes dans le même membre.



2.3.2 · Forces sur le piston écarté de sa position d'équilibre (ici x > 0)

2.3.3 L'équation différentielle peut s'écrire $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4\pi^2 f_0^2\,x = 0$. En déduire l'expression de k en fonction de m et de la fréquence propre f_0.

Les deux écritures de l'équation différentielle (2.3.2 et énoncé) doivent coïncider quel que soit x. Par identification des coefficients de x :

$$\frac{k}{m} = 4\pi^2 f_0^2$$

$$\boxed{k = 4\pi^2 f_0^2\,m}$$

COMPRENDRE
On retrouve la fréquence propre de l'oscillateur élastique, $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$: mesurer f_0 donne accès à k, donc à γ.

2.4 Montrer que le coefficient γ a pour expression $\gamma = \dfrac{4\pi^2 f_0^2\,m\,n_0RT_0}{S^2P_0^2}$.

Données utiles $k = \dfrac{\gamma S^2P_0^2}{n_0RT_0}$ (2.2) ; $k = 4\pi^2 f_0^2\,m$ (2.3.3)

On égale les deux expressions de la constante k :

$$\frac{\gamma\,S^2P_0^2}{n_0RT_0} = 4\pi^2 f_0^2\,m$$

On multiplie les deux membres par $\dfrac{n_0RT_0}{S^2P_0^2}$:

$$\boxed{\gamma = \frac{4\pi^2 f_0^2\,m\,n_0RT_0}{S^2P_0^2}}$$, ce qui est bien l'expression attendue.

2.5 On trouve $\gamma = 1{,}4$ à $\theta = 15{,}9$ °C. Recopier et compléter le calcul à poser pour obtenir ce résultat.

Données utiles $m = 14{,}8$ g ; $S = 3{,}1$ cm^2 ; $f_0 = 1{,}0$ Hz ; $P_0 = 1{,}013$ bar ; 1 bar $= 10^5$ Pa ; $n_0 = 1{,}0$ mol ; $R = 8{,}3\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$; $T(\text{K}) = \theta(^\circ\text{C}) + 273{,}1$

Il manque la masse m et la température T_0, à exprimer dans les unités du système international :

- $m = 14{,}8\ \text{g} = 14{,}8 \times 10^{-3}\ \text{kg}$;
- $T_0 = 15{,}9 + 273{,}1 = 289{,}0\ \text{K}$.

Les autres valeurs sont déjà converties : $S = 3{,}1 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$ et $P_0 = 1{,}013 \times 10^5\ \text{Pa}$.

$$\gamma = \frac{4\pi^2 \times 1{,}0^2 \times 14{,}8 \times 10^{-3} \times 1{,}0 \times 8{,}3 \times 289{,}0}{\left(3{,}1 \times 10^{-4} \times 1{,}013 \times 10^5\right)^2} = 1{,}4$$

PIÈGE
Laisser la masse en grammes ou la température en degrés Celsius. Dans la formule, l'ordre des facteurs est f_0^2, m, n_0, R, T_0 : le premier vide est la masse, le second la température.

2.6 Calculer la valeur théorique $v_{\text{théo}}$ de la célérité des ondes sonores dans l'air à la température θ.

Données utiles $v_{\text{théo}} = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$; $\gamma = 1{,}4$; $R = 8{,}3\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$; $T = 289{,}0$ K (2.5) ; $M = 2{,}9 \times 10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$; aide au calcul : $\dfrac{1{,}4 \times 8{,}3}{2{,}9} = 4{,}0$ et $\sqrt{289} = 17$

$$v_{\text{théo}} = \sqrt{\frac{1{,}4 \times 8{,}3 \times 289{,}0}{2{,}9 \times 10^{-2}}} = \sqrt{\frac{1{,}4 \times 8{,}3}{2{,}9} \times 289 \times 10^2}$$

Avec l'aide au calcul : $v_{\text{théo}} = \sqrt{4{,}0} \times \sqrt{289} \times \sqrt{10^2} = 2{,}0 \times 17 \times 10$

$$v_{\text{théo}} = 3{,}4 \times 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme γ, R et M. La température doit être en kelvins : avec 15,9 on obtiendrait une célérité environ quatre fois trop faible.

MÉTHODE
Sans calculatrice, on regroupe les facteurs pour faire apparaître les quantités de l'aide au calcul, et on sort la puissance de dix : $\dfrac{1}{10^{-2}} = 10^2$, dont la racine vaut 10.

3.1 Vérifier que la valeur théorique $v_{\text{théo}}$ est proche de la valeur expérimentale v_{exp} de la question 1.3.

Données utiles $v_{\text{exp}} = 341\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (1.3) ; $v_{\text{théo}} = 3{,}4 \times 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (2.6)

Arrondie à deux chiffres significatifs, la valeur expérimentale s'écrit $v_{\text{exp}} = 3{,}4 \times 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: elle coïncide avec $v_{\text{théo}}$.

L'écart entre 341 et $340\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ est de $1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit un écart relatif $\dfrac{1}{341} \approx 0{,}3\ \%$.

$v_{\text{théo}} \approx v_{\text{exp}}$ (écart d'environ 0,3 %) : le modèle théorique est en accord avec la mesure de 1822.

MÉTHODE
Deux valeurs se comparent à précision égale : on ramène la plus précise au nombre de chiffres significatifs de l'autre, ou on calcule un écart relatif.

3.2 Si l'expérience s'était déroulée en hiver à 0 °C, avec γ constant, la célérité trouvée serait-elle plus grande ou plus petite ? Justifier.

Dans $v_{\text{théo}} = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$, les grandeurs γ, R et M sont constantes : la célérité est proportionnelle à $\sqrt{T}$, fonction croissante de la température absolue.

À 0 °C, $T = 273{,}1$ K, valeur inférieure à 289,0 K.

La température absolue étant plus faible, la célérité du son serait plus petite en hiver.

COMPRENDRE
L'effet reste modéré car v varie comme $\sqrt{T}$ et T ne baisse que de 5,5 % : on trouverait environ $331\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à 0 °C.