EXERCICE II. LA NUIT DU 21 JUIN 1822 (5,5 POINTS)

Bac S Métropole rattrapage 09/2010 Calculatrice interdite

L'une des expériences historiques permettant de déterminer la célérité du son dans l'air a été réalisée en 1822 près de Paris par ordre du Bureau des Longitudes. Présenté ci-dessous, l'extrait du traité élémentaire de physique (1836) de Monsieur l'abbé Pinault relate cette expérience.

Les deux stations que l'on avait choisies étaient Villejuif et Montlhéry. À Villejuif, le capitaine Boscary fit déposer, sur un point élevé, une pièce de six[1], avec des gargousses[2] de deux et trois livres de poudre.
À Montlhéry, le capitaine Pernetty fit déposer une pièce de même calibre, avec des gargousses de même poids. Les expériences furent faites de nuit et commencèrent à onze heures du soir, le 21 et le 22 juin 1822. De Villejuif on apercevait très distinctement le feu de l'explosion de Montlhéry et vice versa : le ciel était serein et à peu près calme.
La température de l'atmosphère était de 15,9 degrés Celsius. Les coups de canon des deux stations opposées étaient réciproques, de sorte que les résultats ne fussent pas influencés par le vent.
Chacun des observateurs notait sur son chronomètre le temps qui s'écoulait entre l'apparition de la lumière et l'arrivée du son. On peut prendre 54,6 secondes entre le temps moyen que le son mettait à passer d'une station à l'autre. Les deux canons étaient à une distance de 9 549,6 toises[3].

[1] *pièce de canon*
[2] *charge de poudre contenue dans une enveloppe de tissu ou de papier au diamètre de la chambre du canon.*
[3] *unité de longueur ancienne qui correspond à 1,949 m.*

Données :
- célérité de la lumière dans l'air $c = 3{,}0 \times 10^{8}$ m.s^{-1} ;
- constante des gaz parfaits $R = 8{,}3$ J.K^{-1}.mol^{-1} ;
- masse d'une mole d'air $M = 2{,}9 \times 10^{-2}$ kg.mol^{-1} ;
- température absolue T(K) = θ(°C) + 273,1.

1. Détermination expérimentale et historique de la célérité des ondes sonores dans l'air

1.1. Les ondes sonores sont des ondes mécaniques longitudinales. Définir une onde mécanique puis préciser ce que signifie le caractère longitudinal de l'onde sonore.
1.2. Dans l'expérience, la célérité des ondes sonores produites par les deux canons opposées est-elle augmentée, diminuée ou inchangée lors de leur croisement ?
1.3. En utilisant les valeurs mesurées par les observateurs, calculer la valeur de la célérité des ondes sonores, notée v_{exp}. D'après le texte, pour les observateurs, de quel(s) paramètres(s) dépend, a priori, la célérité du son ?

Aide au calcul :
$\frac{9549{,}6}{1{,}9490} = 4899{,}7$; $9549{,}6 \times 1{,}9490 = 18612$; $\frac{4899{,}7}{54{,}6} = 89{,}7$; $\frac{54{,}6}{18612} = 293 \times 10^{-5}$; $\frac{18612}{54{,}6} = 341$

1.4. Les observateurs déclenchent leur chronomètre à l'apparition de la lumière. Quelle durée négligent-t-ils ? Pourquoi est-ce raisonnable ?

2. Détermination de la célérité des ondes sonores dans l'air en utilisant un modèle théorique

Le développement de la mécanique des fluides a permis d'élaborer un modèle pour la propagation des ondes mécaniques dans les gaz. L'expression théorique de la célérité de ces ondes qui découle de ce modèle est :

$$v_{théo} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Avec M la masse d'une mole d'air, T sa température absolue, R la constante des gaz parfaits et γ un nombre sans dimension qui dépend notamment des propriétés de l'air.

La valeur du coefficient γ de l'air a été déterminée par Rückhardt (1929, scientifique allemand) en utilisant les propriétés élastiques des gaz avec le dispositif schématisé **figure 1**.
Un piston étanche coulisse sans frottement dans un tube cylindrique ; le tube et le récipient enferment une quantité de matière n_0 d'air. Le piston écarté de sa position d'équilibre oscille autour de cette position d'un mouvement analogue à celui de l'oscillateur élastique {ressort + solide de masse m}.
Le système {air + piston de masse m} est équivalent à un système {ressort + solide de masse m}.

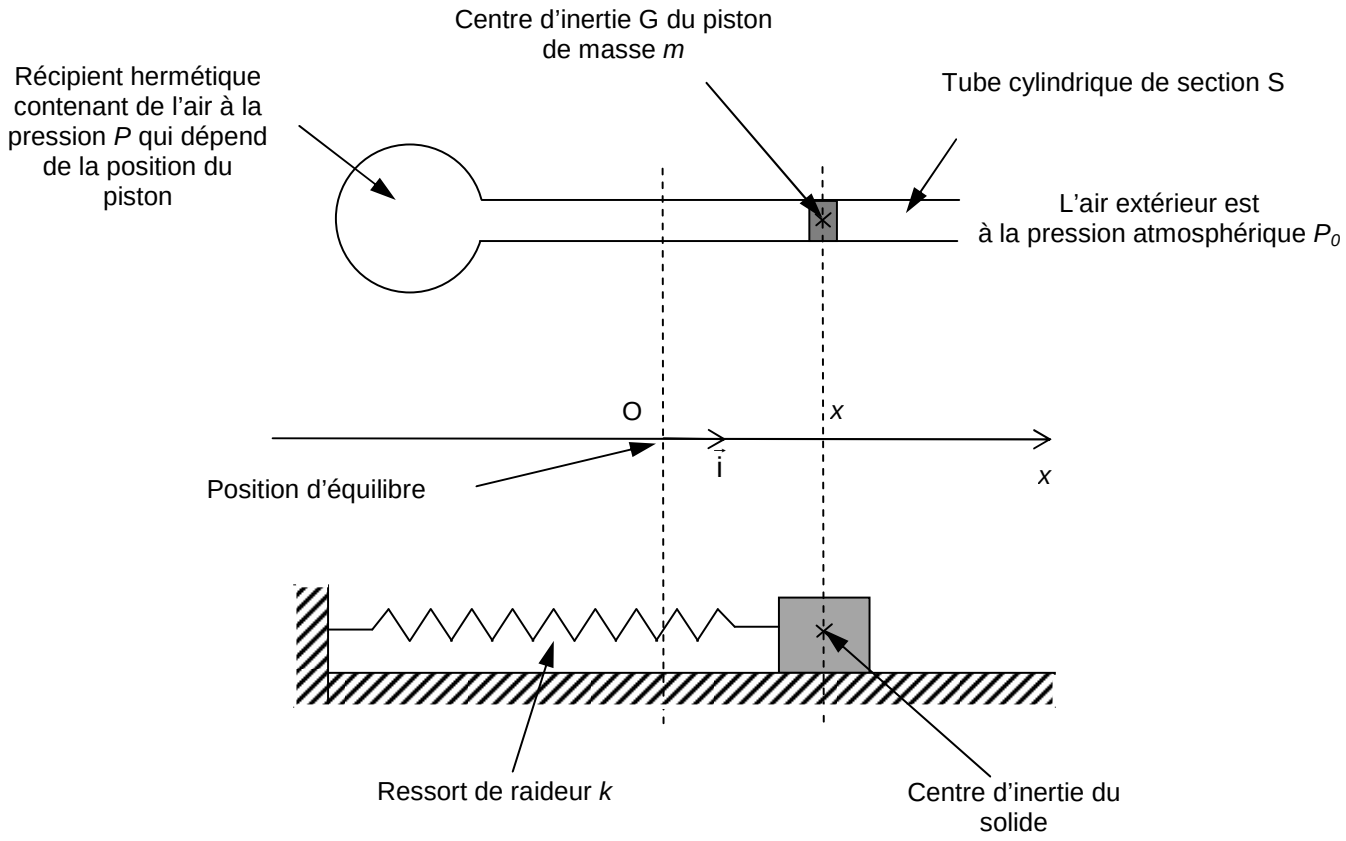


Figure 1. Système {air + piston} et système {ressort + solide}

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.
La position du piston est repérée par son abscisse x sur l'axe Ox dont l'origine O est confondue avec la position du piston à l'équilibre.

Dans tout l'exercice, les frottements sont négligés. L'air extérieur et l'air intérieur sont à la même température. Cette température est constante tout au long de l'expérience, on la note T_0.

2.1. Le piston est soumis aux forces citées ci-dessous :

- Le poids $\vec{P}$
- La réaction du support $\vec{R}$
- Les forces pressantes de l'air à l'intérieur du récipient, dont la somme est équivalente à une force unique $\vec{F}_{\text{int}}$.
- Les forces pressantes de l'air à l'extérieur du récipient, dont la somme est équivalente à une force unique $\vec{F}_{ext}$.

Donner pour chacune de ces forces la nature de l'interaction : interaction de contact ou à distance.

2.2 L'ensemble des forces s'exerçant sur le piston est équivalent à une force unique horizontale :

$$\vec{F} = -kx\vec{i} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\gamma S^2 P_0^2}{n_0 R T_0} \quad \text{où } k \text{ est une constante positive.}$$

Pourquoi peut-on dire que cette force se comporte comme une force de rappel ? Justifier.

2.3.1. Énoncer la deuxième loi de Newton.
2.3.2. Déterminer l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G du piston, en projetant sur l'axe (O*x*) l'égalité vectorielle obtenue en appliquant la deuxième loi de Newton.
2.3.3. L'équation différentielle obtenue peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\pi^2 f_0^2 x = 0$$

En déduire l'expression de k en fonction de la masse m du piston et de sa fréquence propre f_0.

2.4. Montrer que le coefficient γ a pour expression : $\gamma = \dfrac{4\pi^2 f_0^2 m n_0 R T_0}{S^2 P_0^2}$.

2.5. Dans les unités du système international, on trouve γ = 1,4 à la température θ = 15,9 °C de l'atmosphère dans la nuit du 21 juin 1822.
Recopier et compléter le calcul qu'il faut poser pour obtenir ce résultat.

$$\gamma = \frac{4\pi^2 \times 1{,}0^2 \times \ldots \times 1{,}0 \times 8{,}3 \times \ldots}{\left(3{,}1\times10^{-4} \times 1{,}013 \times 10^5\right)^2} = 1{,}4$$

Données :

- masse du piston : m = 14,8 g ;
- section du tube cylindrique : S = 3,1 cm^2 ;
- fréquence propre : f_0 = 1,0 Hz ;
- Pression atmosphérique : P_0 = 1,013 bar ;
- 1 bar = 10^5 Pa ;
- Quantité de matière d'air enfermée : n_0 = 1,0 mol.

2.6. Calculer la valeur théorique $v_{théo}$ de la célérité des ondes sonores dans l'air à cette température θ.

Aide aux calculs :	$\dfrac{1{,}4\times8{,}3}{2{,}9} = 4{,}0$;	$\sqrt{289} = 17$;	$\dfrac{2{,}9}{(1{,}4\times8{,}3)} = 25\times10^{-2}$;	$\dfrac{17}{5} = 3{,}4$

3. Cohérence avec la mesure effectuée dans la nuit du 21 juin 1822

3.1. Vérifier que la valeur théorique $v_{théo}$ est proche de la valeur expérimentale v_{exp} déterminée dans la question 1.3.
3.2. Si l'expérience s'était déroulée en hiver avec une température extérieure de 0°C et en considérant que γ reste constant, la valeur trouvée de la célérité serait-elle plus grande ou plus petite ? Justifier.