L'oscillateur harmonique

Bac S 2010 Liban (ancien programme) · Exercice 2 **6,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Calculer la période propre T_0 du pendule simple, d'expression $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Données utiles $l = 100\ \text{cm}$; $g = 9{,}81\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$

La longueur doit être en mètres : $l = 100\ \text{cm} = 1{,}00\ \text{m}$.

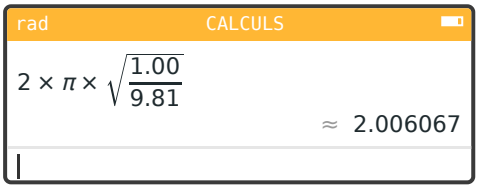
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}00}{9{,}81}}$$

$T_0 = 2{,}01\ \text{s}$

PIÈGE
Laisser l en centimètres donne $T_0 \approx 20\ \text{s}$, valeur absurde pour un pendule d'un mètre.

COMPRENDRE
Les données l et g ont trois chiffres significatifs : le résultat en garde trois. Cette règle vaut pour tous les calculs de l'exercice.

À LA CALCULATRICE



1.2 Pourquoi peut-on, d'après le tableau du document 1, parler d'isochronisme des petites oscillations ? Justifier.

Données utiles $T_0 = 2{,}01\ \text{s}$ (1.1) ; document 1 : $T = 2{,}01\ \text{s}$ à 5°, 10° et 15°, puis $2{,}02$; $2{,}03$; $2{,}04$; $2{,}05\ \text{s}$ de 20° à 35°

Pour les amplitudes de 5°, 10° et 15°, la période mesurée garde la même valeur, $T = 2{,}01\ \text{s}$, égale à la période propre T_0 calculée en 1.1.

Au-delà, T augmente lentement avec l'amplitude (de $2{,}02\ \text{s}$ à 20° jusqu'à $2{,}05\ \text{s}$ à 35°).

Aux petites amplitudes (ici jusqu'à 15°), la période ne dépend pas de l'amplitude : c'est l'**isochronisme des petites oscillations**.

COMPRENDRE
L'expression de T_0 ne contient pas l'amplitude : elle n'est valable que pour de petits angles. À 35°, l'écart avec T_0 n'atteint encore que 2 %.

2.1.1 Comment qualifier, d'après le document 3, les oscillations obtenues ?

La courbe $x(t)$ est une sinusoïde dont l'amplitude reste la même à chaque oscillation (environ $3{,}5\ \text{cm}$).

Les oscillations sont **périodiques, sinusoïdales et non amorties** (oscillations libres).

COMPRENDRE
Le coussin d'air supprime presque tous les frottements : c'est pour cela que l'amplitude ne diminue pas sur la durée de l'enregistrement.

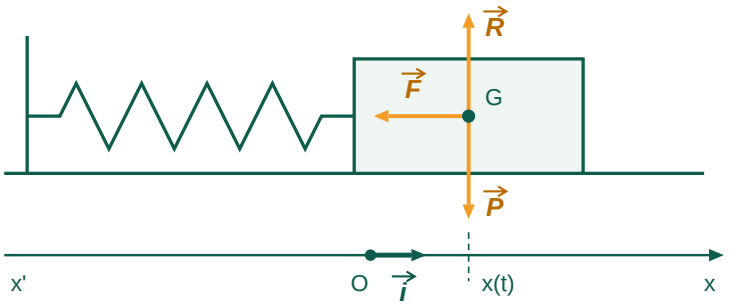
2.1.2 Faire le bilan des forces s'exerçant sur S et les représenter, sans souci d'échelle, sur le document 2.

Système : le solide S, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les frottements sont négligés (coussin d'air). S est soumis à trois forces, représentées à partir de G :

- son poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la réaction $\vec{R}$ du rail (action du coussin d'air), verticale, vers le haut ;
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$, horizontale.

Sur le document 2, $x > 0$ (ressort étiré) : $\vec{F}$ est dirigée vers O, donc vers la gauche ; $\vec{P}$ et $\vec{R}$ se compensent.

PIÈGE
Le sens de $\vec{F}$ dépend du signe de x : le ressort ramène toujours le solide vers O. Ne pas ajouter de « force de vitesse » dans le sens du mouvement.



2.1.2 · Document 2 complété : en orange, les trois forces appliquées au solide (ressort étiré, $x > 0$)

2.1.3 Montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$.

Deuxième loi de Newton appliquée à S, de masse m constante, dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}_G$$

En projection sur l'axe $(O, \vec{i})$, le poids et la réaction, verticaux, ont une composante nulle :

$$-k\,x = m\,a_x = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

On divise par m et on regroupe dans le même membre :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

MÉTHODE
Équation différentielle d'un mouvement : 1) système et référentiel ; 2) bilan des forces ; 3) deuxième loi de Newton ; 4) projection sur l'axe du mouvement ; 5) a_x remplacée par $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

2.2.1 Déterminer l'expression de la période propre T_0 en fonction de k et de m.

L'équation du 2.1.3 a la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2} + A\,Y = 0$ avec $Y = x$ et $A = \dfrac{k}{m}$.

Or $A = \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}$, donc $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{k}{m}$, soit $T_0^2 = 4\pi^2\,\dfrac{m}{k}$. Une période est positive :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

COMPRENDRE
Vérification par les unités : $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, donc k est en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ et $\sqrt{m/k}$ est bien en secondes.

2.2.2 Calculer la valeur de T_0.

Données utiles $m = 205\ \mathrm{g}$; $k = 10{,}0\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$

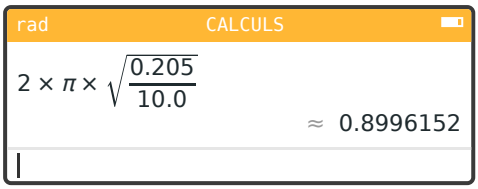
Avec $m = 205\ \mathrm{g} = 0{,}205\ \mathrm{kg}$:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}205}{10{,}0}}$$

$$\boxed{T_0 = 0{,}900\ \mathrm{s}}$$

PIÈGE
La masse se convertit en kilogrammes. Avec $m = 205$, on trouverait $28\ \mathrm{s}$, sans rapport avec le document 3.

À LA CALCULATRICE



2.2.3 Déterminer la valeur expérimentale $T_{0,\text{exp}}$ en explicitant le raisonnement. Comparer avec la valeur calculée en 2.2.2.

Données utiles document 3 ; $T_0 = 0{,}900$ s (2.2.2)

Pour réduire l'incertitude de lecture, on mesure plusieurs périodes. Sur le document 3, le premier maximum est à $t = 0$ et le quatrième à $t \approx 2{,}7$ s : cet intervalle contient trois périodes.

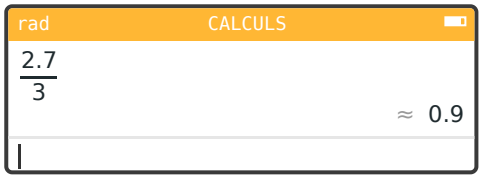
$$T_{0,\text{exp}} = \frac{2{,}7}{3} = 0{,}90 \text{ s}$$

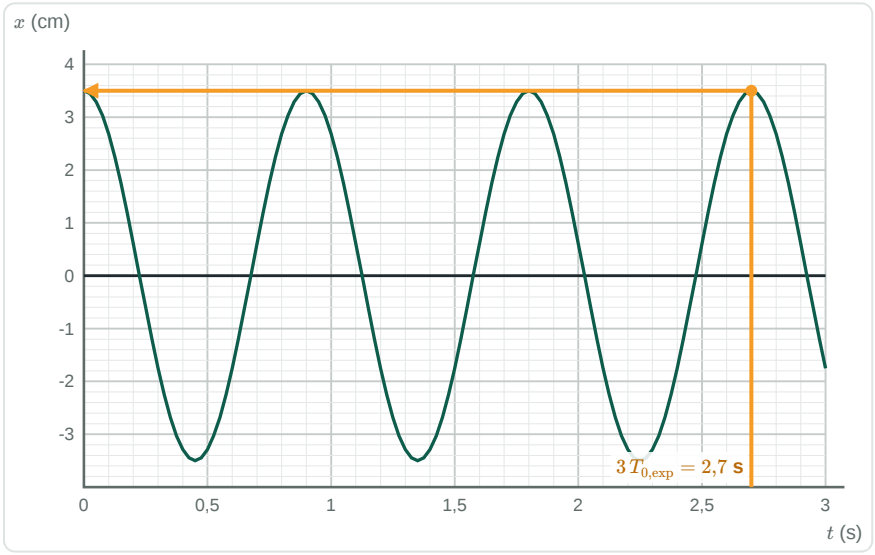
$T_{0,\text{exp}} = 0{,}90$ s : la valeur expérimentale s'accorde avec la valeur calculée $T_0 = 0{,}900$ s, à la précision de la lecture graphique.

MÉTHODE

Sur un enregistrement, toujours mesurer la durée de plusieurs périodes entre deux points faciles à repérer (maximums ou passages par zéro dans le même sens), puis diviser par leur nombre.

À LA CALCULATRICE





2.2.3 · Document 3 : trois périodes mesurées entre le premier et le quatrième maximum

2.3.1 Comment appelle-t-on les énergies d'expressions $\frac{1}{2}\,k\,x^2$ et $\frac{1}{2}\,m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$?

$\frac{1}{2}\,k\,x^2$ est l'**énergie potentielle élastique** E_{pe} du ressort, allongé de x.

$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$ est l'**énergie cinétique** E_c du solide, puisque $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

$E_{pe} = \frac{1}{2}\,k\,x^2$ (potentielle élastique) et $E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$ (cinétique)

2.3.2 Pour un lâcher sans vitesse initiale, $x(t) = X_m \cos\left(2\pi \dfrac{t}{T_0}\right)$. Montrer que l'énergie mécanique a pour expression $E_m = \dfrac{1}{2} k X_m^2$.

Données utiles $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \dfrac{k}{m}$ (2.2.1)

Le rail est horizontal : $E_m = E_c + E_{pe} = \dfrac{1}{2} m \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \dfrac{1}{2} k x^2$.

Vitesse : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2\pi}{T_0} X_m \sin\left(2\pi \dfrac{t}{T_0}\right)$, donc

$$E_c = \frac{1}{2} m \frac{4\pi^2}{T_0^2} X_m^2 \sin^2\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right) = \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right)$$

car $m \dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = k$. De plus $E_{pe} = \dfrac{1}{2} k X_m^2 \cos^2\left(2\pi \dfrac{t}{T_0}\right)$. En additionnant :

$$E_m = \frac{1}{2} k X_m^2 \left[\sin^2\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right) + \cos^2\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right)\right]$$

$E_m = \dfrac{1}{2} k X_m^2$: l'énergie mécanique ne dépend pas du temps.

PIÈGE
En dérivant le cosinus, ne pas oublier le facteur $\dfrac{2\pi}{T_0}$: sans lui, les deux termes n'ont pas le même coefficient et la somme ne se simplifie pas.

MÉTHODE
Plus rapide : à $t = 0$, la vitesse est nulle et $x = X_m$, donc $E_m = \dfrac{1}{2} k X_m^2$. Sans frottement, E_m se conserve. La question demande toutefois le calcul complet.

2.3.3 Quelle est la valeur minimale de l'énergie mécanique ?

D'après 2.3.2, $E_m = \dfrac{1}{2} k X_m^2$: c'est un carré multiplié par une constante positive, donc $E_m \geq 0$. La plus petite valeur est obtenue pour $X_m = 0$, c'est-à-dire lorsque le solide reste immobile en O.

$E_{m,\min} = 0$ J

COMPRENDRE
Au cours d'un mouvement donné, E_m reste constante : pour le document 3, $X_m \approx 3{,}5$ cm donne $E_m \approx 6{,}1$ mJ. Le minimum nul sera à comparer au niveau $n = 0$ de la partie 3, qui n'est pas nul.

2.4.1 Calculer l'énergie mécanique lorsque $X_m = 1{,}00$ cm.

Données utiles $k = 10{,}0$ N · m^{-1} ; $E_m = \dfrac{1}{2} k X_m^2$ (2.3.2)

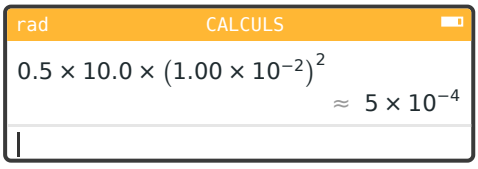
Avec $X_m = 1{,}00$ cm $= 1{,}00 \times 10^{-2}$ m :

$$E_m = \frac{1}{2} k X_m^2 = \frac{1}{2} \times 10{,}0 \times \left(1{,}00 \times 10^{-2}\right)^2$$

$E_m = 5{,}00 \times 10^{-4}$ J

PIÈGE
L'amplitude est au carré : oublier de convertir les centimètres en mètres multiplie le résultat par 10^4.

À LA CALCULATRICE



2.4.2 Combien de valeurs de l'énergie mécanique sont possibles entre $X_m = 0$ et $X_m = 1{,}00$ cm : aucune ou une infinité ? Justifier.

On peut lâcher le solide de n'importe quelle position : l'amplitude X_m peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et $1{,}00$ cm. Comme $E_m = \dfrac{1}{2} k X_m^2$, à chaque amplitude correspond une énergie.

Une **infinité** de valeurs sont possibles, entre 0 et $5{,}00 \times 10^{-4}$ J : l'énergie de l'oscillateur mécanique varie de façon continue.

3.1 L'énergie de vibration E_{vib} de la molécule est quantifiée. Qu'entend-on par énergie quantifiée ?

Une énergie quantifiée ne peut prendre que certaines valeurs bien déterminées (valeurs discrètes), séparées les unes des autres : toutes les valeurs intermédiaires sont interdites.

COMPRENDRE
C'est l'opposé du 2.4.2 : pour le pendule élastique, toutes les énergies sont permises ; pour la molécule, seules celles des niveaux $n = 0, 1, 2, \ldots$ le sont.

3.2.1 Vérifier que la fréquence ν_0 de l'oscillateur vaut environ $5{,}13 \times 10^{13}$ Hz, puis calculer les énergies manquantes dans le tableau du document 4.

Données utiles $T_0 = 1{,}95 \times 10^{-14}$ s ; $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s ; $E_{vib}(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\,\nu_0$

Fréquence : $\nu_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{1{,}95 \times 10^{-14}} = 5{,}13 \times 10^{13}$ Hz, valeur attendue.

Niveau $n = 0$: $E_{vib}(0) = \dfrac{1}{2} h\,\nu_0 = \dfrac{1}{2} \times 6{,}63 \times 10^{-34} \times 5{,}13 \times 10^{13} = 1{,}70 \times 10^{-20}$ J

Niveau $n = 1$: $E_{vib}(1) = \dfrac{3}{2} h\,\nu_0 = \dfrac{3}{2} \times 6{,}63 \times 10^{-34} \times 5{,}13 \times 10^{13} = 5{,}10 \times 10^{-20}$ J

Tableau complété : $E_{vib}(0) = 1{,}70 \times 10^{-20}$ J et $E_{vib}(1) = 5{,}10 \times 10^{-20}$ J

PIÈGE
Le tableau est gradué en 10^{-20} J : on y inscrit 1,70 et 5,10, sans la puissance de dix.

COMPRENDRE
Contrôle avec les valeurs fournies : $E_{vib}(2) = 2{,}5 \times 3{,}40 = 8{,}50$, en accord avec le tableau.

À LA CALCULATRICE

rad — CALCULS

$\dfrac{1}{1.95 \times 10^{-14}} \approx 5.128205 \times 10^{13}$

$0.5 \times 6.63 \times 10^{-34} \times 5.13 \times 10^{13} \approx 1.700595 \times 10^{-20}$

$1.5 \times 6.63 \times 10^{-34} \times 5.13 \times 10^{13} \approx 5.101785 \times 10^{-20}$

3.2.2 Représenter le diagramme en énergie de la molécule sur le document 4, chaque niveau étant indiqué par un segment horizontal. Que peut-on dire de l'écart entre deux niveaux successifs ?

Données utiles E_{vib} en 10^{-20} J : 1,70 ; 5,10 (3.2.1) ; 8,50 ; 11,90 ; 15,30

On trace un segment horizontal à la hauteur de chaque énergie du tableau.

Écart entre deux niveaux voisins :

$$E_{vib}(n+1) - E_{vib}(n) = \left(n + \frac{3}{2}\right) h\,\nu_0 - \left(n + \frac{1}{2}\right) h\,\nu_0 = h\,\nu_0$$

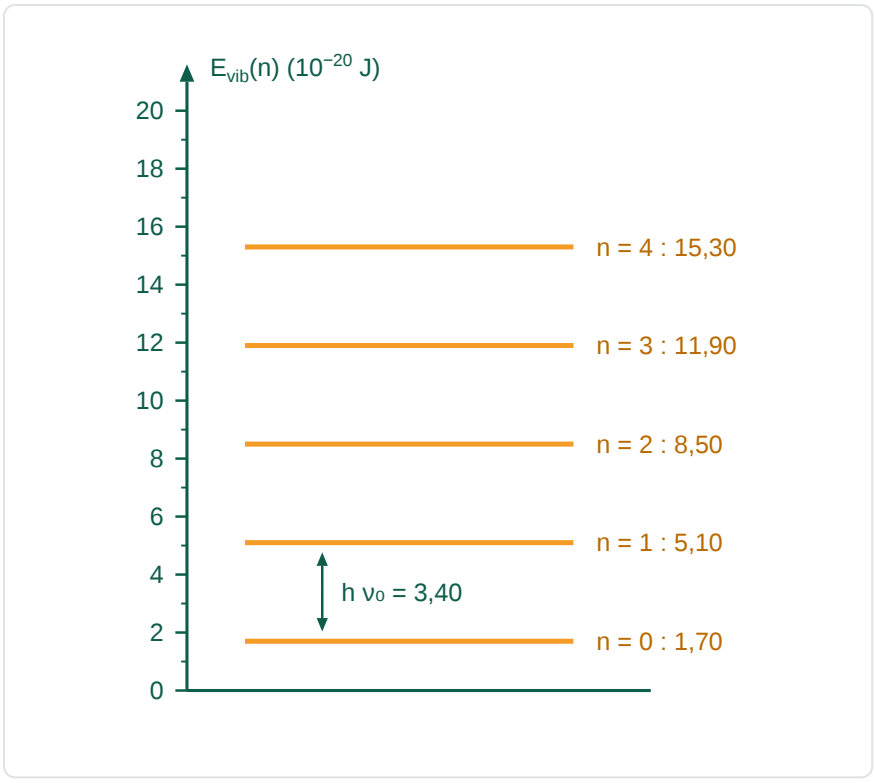
L'écart est le même entre tous les niveaux successifs : $h\,\nu_0 = 3{,}40 \times 10^{-20}$ J. Les niveaux sont régulièrement espacés.

COMPRENDRE
Le niveau le plus bas n'est pas à zéro : même dans son état fondamental, la molécule vibre encore, avec l'énergie $\frac{1}{2} h\,\nu_0$.

À LA CALCULATRICE

rad — CALCULS

$6.63 \times 10^{-34} \times 5.13 \times 10^{13} \approx 3.40119 \times 10^{-20}$



3.2.2 · Document 4 complété : cinq niveaux régulièrement espacés

3.2.3 La transition du niveau $n = 0$ au niveau $n = 1$ correspond à l'absorption d'une radiation. Calculer sa longueur d'onde dans le vide. Cette radiation est-elle visible ? Justifier.

Données utiles $\Delta E = h\,\nu_0 = 3{,}40 \times 10^{-20}$ J (3.2.2) ; $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s ; $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m · s^{-1}

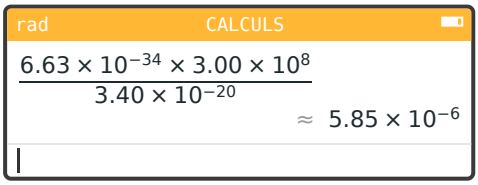
Le photon absorbé apporte exactement l'énergie qui sépare les deux niveaux : $\Delta E = E_{vib}(1) - E_{vib}(0) = \dfrac{h\,c}{\lambda}$, d'où

$$\lambda = \frac{h\,c}{\Delta E} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^{8}}{3{,}40 \times 10^{-20}} = 5{,}85 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

Le domaine visible s'étend environ de 400 nm à 800 nm ; or $\lambda = 5\,850$ nm > 800 nm.

$\lambda = 5{,}85 \times 10^{-6}$ m $= 5{,}85\ \mu$m : la radiation n'est pas visible, elle appartient à l'**infrarouge**.

À LA CALCULATRICE



COMPRENDRE
C'est le principe de la spectroscopie infrarouge : chaque liaison absorbe à la fréquence de sa propre vibration, ce qui permet de l'identifier.

MÉTHODE
Comme $\Delta E = h\,\nu_0$, la radiation a la fréquence de l'oscillateur : $\lambda = \dfrac{c}{\nu_0} = c\,T_0$ redonne $5{,}85 \times 10^{-6}$ m en une ligne.