Aspect énergétique d'un système {solide-ressort}

Bac S 2010 Antilles-Guyane (ancien programme) · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

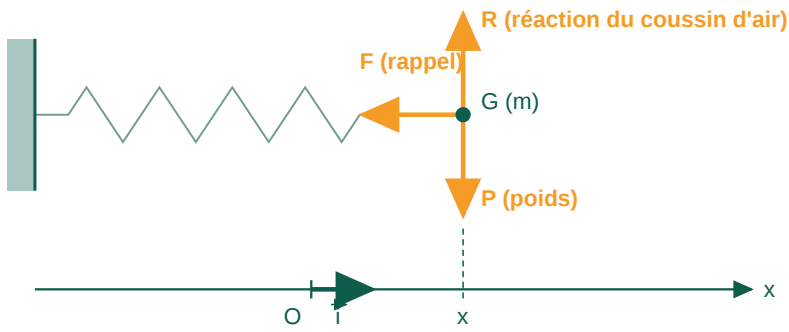
1.1 Faire l'inventaire des forces exercées sur le mobile et les représenter, sans souci d'échelle, sur la figure 1 recopiée.

Système : le mobile, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à trois forces :

- son poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la réaction $\vec{R}$ du coussin d'air, verticale, vers le haut (pas de frottement) ;
- la force de rappel $\vec{F}$ du ressort, horizontale, dirigée vers O.

Trois forces : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{F}$, toutes appliquées en G (schéma ci-dessous).

PIÈGE
Ajouter une force « de lancement » ou une force de frottement. Une fois lâché, le mobile ne subit que ces trois forces, et l'énoncé néglige les frottements.



1.1 · Figure 1 recopiée avec les trois forces (cas $x > 0$, ressort étiré)

1.2 Rappeler l'expression vectorielle de la force de rappel $\vec{F}$ du ressort en fonction de k, x et $\vec{i}$.

$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$$

COMPRENDRE
Le signe « $-$ » traduit le rappel : si $x > 0$ (ressort étiré) la force est selon $-\vec{i}$, si $x < 0$ (ressort comprimé) elle est selon $+\vec{i}$. Elle ramène toujours G vers O.

1.3 En appliquant la seconde loi de Newton au mobile, établir l'équation différentielle du mouvement.

Dans le référentiel terrestre galiléen, la seconde loi de Newton appliquée au mobile de masse m constante s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}_G$$

$\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont verticales : leur coordonnée sur l'axe Ox est nulle. En projetant sur Ox, avec $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$:

$$-k\,x = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, loi vectorielle, puis projection sur l'axe du mouvement. La projection fait disparaître les forces perpendiculaires à l'axe.

1.4 Vérifier que $x = x_M \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right)$ est solution de l'équation différentielle quelles que soient les constantes $x_M > 0$ et φ.

On dérive deux fois par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x_M\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -x_M\,\frac{k}{m}\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right) = -\frac{k}{m}\,x$$

On reporte dans le premier membre de l'équation : $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = -\frac{k}{m}\,x + \frac{k}{m}\,x = 0$.

L'équation est vérifiée à tout instant, sans condition sur x_M ni sur φ : la fonction proposée est solution.

PIÈGE
Oublier le facteur $\sqrt{k/m}$ qui sort à chaque dérivation (dérivée d'une fonction composée). Dérivé deux fois, il donne k/m, et non $\sqrt{k/m}$.

1.5 Le mobile est lâché à $t = 0$ sans vitesse initiale depuis la position x_0. Déterminer numériquement x_M et φ.

Données utiles $x_0 = +4{,}0$ cm ; $v_x(0) = 0$

Vitesse initiale nulle : $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -x_M\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\varphi = 0$. Comme x_M, k et m ne sont pas nuls, $\sin\varphi = 0$, donc $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.

Position initiale : $x(0) = x_M\cos\varphi = x_0$.

- Si $\varphi = \pi$: $x_M = -x_0 < 0$, impossible puisque $x_M > 0$.
- Si $\varphi = 0$: $x_M = x_0$, qui est bien positif.

$\varphi = 0$ et $x_M = x_0 = 4{,}0$ cm

COMPRENDRE
Deux constantes inconnues, donc deux conditions initiales : la position et la vitesse à $t = 0$. Un lâcher sans vitesse donne toujours une amplitude égale à l'écart initial.

2.1 En appliquant la troisième loi de Newton, trouver l'expression vectorielle de la force $\vec{F}_{op}$ exercée par l'opérateur en fonction de k, x et $\vec{i}$.

L'opérateur et le ressort sont en interaction à l'extrémité G. Le ressort exerce sur l'opérateur la force de rappel $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$. D'après la troisième loi de Newton (actions réciproques), l'opérateur exerce sur le ressort la force opposée :

$$\vec{F}_{op} = -\vec{F}$$

$\vec{F}_{op} = k\,x\,\vec{i}$

COMPRENDRE
Les deux forces d'une interaction ont même direction, même valeur et des sens opposés, et elles s'appliquent à deux systèmes différents : ici l'une au ressort, l'autre à l'opérateur.

2.2 La force $\vec{F}_{op}$ est-elle constante lors du déplacement de l'extrémité G de A vers B ? Justifier.

La valeur de la force est $F_{op} = k\,x$: elle est proportionnelle à l'abscisse x de G. Or x augmente de x_A à x_B pendant le déplacement, donc la valeur de la force passe de $k\,x_A$ à $k\,x_B$.

Non : $\vec{F}_{op}$ garde sa direction et son sens, mais sa valeur augmente avec x. Elle n'est pas constante.

2.3 Montrer que le travail élémentaire de $\vec{F}_{op}$ pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}x\,\vec{i}$ s'écrit $\delta W = k\,x\,\mathrm{d}x$.

Sur un déplacement très petit, x ne varie presque pas : la force peut être considérée comme constante, et son travail est le produit scalaire de la force par le déplacement.

$$\delta W = \vec{F}_{op} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = (k\,x\,\vec{i}) \cdot (\mathrm{d}x\,\vec{i}) = k\,x\,\mathrm{d}x\,(\vec{i}\cdot\vec{i})$$

Comme $\vec{i}$ est unitaire, $\vec{i}\cdot\vec{i} = 1$.

$$\boxed{\delta W = k\,x\,\mathrm{d}x}$$

PIÈGE
Écrire directement $W = F_{op} \times AB$ sur tout le trajet. Cette formule ne vaut que pour une force constante ; ici il faut découper le trajet en déplacements élémentaires.

2.4 Par intégration, trouver l'expression du travail de $\vec{F}_{op}$ sur le déplacement de A (abscisse x_A) à B (abscisse x_B).

Le travail total est la somme des travaux élémentaires entre x_A et x_B :

$$W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \int_{x_A}^{x_B} k\,x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,k\,x^2\right]_{x_A}^{x_B}$$

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2}\,k\,x_B^2 - \frac{1}{2}\,k\,x_A^2}$$

COMPRENDRE
Avec $x_B > x_A > 0$, ce travail est positif : la force de l'opérateur est dans le sens du déplacement, son travail est moteur.

2.5 En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort.

Le travail fourni par l'opérateur pour déformer le ressort est stocké par celui-ci sous forme d'énergie potentielle élastique :

$$E_{pe}(B) - E_{pe}(A) = W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2}\,k\,x_B^2 - \frac{1}{2}\,k\,x_A^2$$

En choisissant $E_{pe} = 0$ pour le ressort au repos ($x = 0$) :

$$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}\,k\,x^2}$$

COMPRENDRE
x est l'allongement du ressort, et non sa longueur. À cause du carré, l'énergie stockée est la même pour un ressort étiré ou comprimé de la même quantité.

3.1 Donner l'expression de l'énergie cinétique E_C du solide de masse m en translation à la vitesse V, et préciser les unités des grandeurs.

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}\,m\,V^2}$$, avec E_C en joules (J), m en kilogrammes (kg) et V en mètres par seconde ($\mathrm{m\cdot s^{-1}}$).

3.2 Donner l'expression de l'énergie mécanique E_M du mobile en fonction de V, m, x et k.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles. L'énergie potentielle de pesanteur est prise nulle, il reste l'énergie potentielle élastique :

$$E_M = E_C + E_{pe}$$

$$\boxed{E_M = \frac{1}{2}\,m\,V^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2}$$

3.3.1 Donner l'expression de la période propre T_0 du système {solide, ressort}.

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

COMPRENDRE
Elle se retrouve avec la solution de 1.4 : le cosinus reprend la même valeur quand $\sqrt{k/m}\,t$ augmente de 2π, soit $\sqrt{k/m}\,T_0 = 2\pi$.

3.3.2 Déterminer la pseudo-période du mouvement pour chaque enregistrement et en déduire, en justifiant, une valeur approchée de la période propre T_0.

Données utiles documents 1 et 2

Document 1 : la courbe passe par un maximum à $t = 0$ et le quatrième maximum est à $t = 0{,}99$ s. Trois périodes durent donc $0{,}99$ s :

$$T = \frac{0{,}99}{3} = 0{,}33 \text{ s}$$

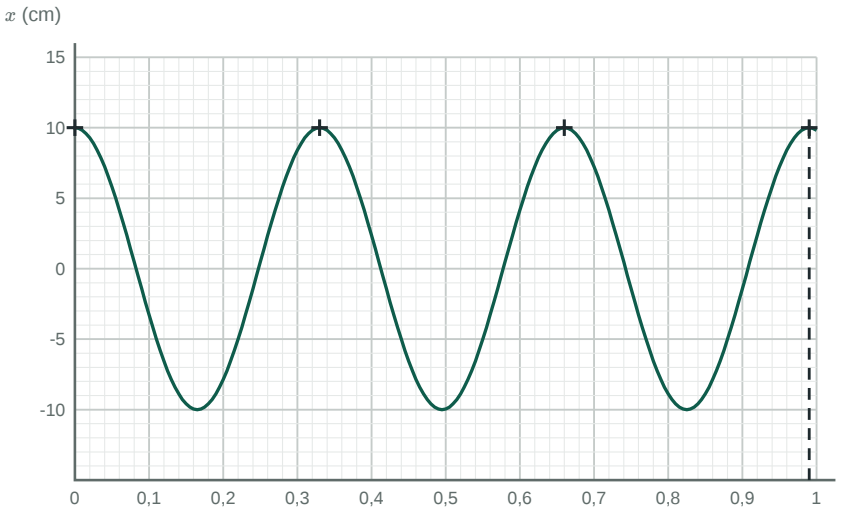
Document 2 : l'amplitude diminue, mais les maximums se trouvent aux mêmes dates ; trois pseudo-périodes durent aussi $0{,}99$ s, soit $T = 0{,}33$ s.

Les frottements du deuxième enregistrement sont faibles et ne modifient pas la durée d'une oscillation : la pseudo-période est pratiquement égale à la période propre.

$T \approx 0{,}33$ s pour les deux enregistrements, donc $T_0 \approx 0{,}33$ s

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la lecture $0{,}99$ s et comme k. Dans le document 1, sans amortissement, la période mesurée est directement la période propre.

MÉTHODE
Mesurer plusieurs périodes puis diviser : l'erreur de lecture sur le graphique est divisée d'autant. Une seule période lue ici donnerait « entre $0{,}32$ et $0{,}34$ s ».



3.3.2 · Document 1 : trois périodes entre $t = 0$ et $t = 0{,}99$ s

3.3.3 En déduire, d'après la valeur trouvée pour T_0, la valeur de la masse m du mobile autoporteur.

Données utiles $T_0 = 0{,}33$ s (3.3.2) ; $k = 15$ N · m^{-1} ; aide au calcul : $\dfrac{0{,}33^2 \times 15}{4\pi^2} = 4{,}1 \times 10^{-2}$

On élève au carré l'expression de la période propre : $T_0^2 = 4\pi^2 \dfrac{m}{k}$, d'où

$$m = \frac{k\,T_0^2}{4\pi^2}$$

$$m = \frac{15 \times 0{,}33^2}{4\pi^2} = 4{,}1 \times 10^{-2} \text{ kg}$$

$m = 4{,}1 \times 10^{-2}$ kg, soit 41 g

PIÈGE
Sans calculatrice, il faut repérer la bonne aide au calcul : c'est celle où $0{,}33$ est au carré. Les deux dernières, sans carré, correspondent à l'oubli d'élever T_0 au carré.

3.3.4 Attribuer à chaque courbe (1, 2 et 3) du document 3 la forme d'énergie représentée, en justifiant.

Données utiles document 3 ; lâcher sans vitesse initiale, ressort étiré

- À $t = 0$, le mobile est lâché sans vitesse : $E_C(0) = 0$. La courbe 2 part de zéro, c'est l'énergie cinétique.
- À $t = 0$, l'allongement x est maximal : E_{pe} est maximale. La courbe 3 part de son maximum, c'est l'énergie potentielle élastique.
- Sans frottement, l'énergie mécanique $E_M = E_C + E_{pe}$ se conserve. La courbe 1 est constante, c'est l'énergie mécanique.

Courbe 1 : E_M ; courbe 2 : E_C ; courbe 3 : E_{pe}

COMPRENDRE
Vérification possible : l'amplitude lue sur le document 1 est 10 cm, donc $E_M = \frac{1}{2} \times 15 \times 0{,}10^2 = 0{,}075$ J. C'est bien la valeur constante de la courbe 1.

3.3.5 Justifier la différence entre les courbes des documents 3 et 4.

Document 3 (soufflerie à plein régime) : les frottements sont négligeables, l'énergie mécanique reste constante ; E_C et E_{pe} s'échangent sans perte.

Document 4 (tuyau d'air pincé) : le coussin d'air est moins efficace, le mobile frotte sur la table. Le travail des forces de frottement est résistant : il dissipe peu à peu l'énergie mécanique sous forme de chaleur.

Dans le document 4, l'énergie mécanique décroît au cours du temps à cause des frottements, et les maximums de E_C et de E_{pe} diminuent avec elle.

COMPRENDRE
C'est la traduction énergétique du document 2 : l'amplitude des oscillations diminue, donc E_{pe} maximale ($\frac{1}{2} k x_M^2$) diminue aussi.