Histoires de pêche

Bac S 2010 Centres étrangers (ancien programme) · Exercice 4 **9,5 points** **Durée conseillée 1 h 57**

1.1 Donner les caractéristiques (direction, sens, expression littérale de la valeur) du poids $\vec{P}$ et de la poussée d'Archimède $\vec{P}_A$.

Poids $\vec{P}$: direction verticale, sens vers le bas, valeur $P = m\,g$.

Poussée d'Archimède $\vec{P}_A$: direction verticale, sens vers le haut, valeur $P_A = \rho_{\text{air}}\,V\,g$.

$P = m\,g$ (vers le bas) ; $P_A = \rho_{\text{air}}\,V\,g$ (vers le haut)

PIÈGE
Dans P_A, la masse volumique est celle du fluide déplacé (l'air), pas celle du plomb, et V est le volume du plomb.

1.2 Peut-on négliger la poussée d'Archimède par rapport au poids ? Justifier.

Données utiles $m = 1{,}50 \times 10^{-1}$ kg ; $\rho_{\text{air}} = 1{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $V = 1{,}5 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$

On compare les deux valeurs par leur rapport :

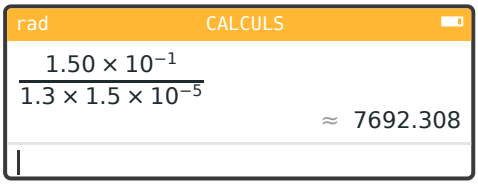
$$\frac{P}{P_A} = \frac{m\,g}{\rho_{\text{air}}\,V\,g} = \frac{m}{\rho_{\text{air}}\,V} = \frac{1{,}50 \times 10^{-1}}{1{,}3 \times 1{,}5 \times 10^{-5}} = 7{,}7 \times 10^{3}$$

$\dfrac{P}{P_A} \approx 7{,}7 \times 10^{3}$: le poids est plusieurs milliers de fois plus grand, la poussée d'Archimède est négligeable.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme ρ_{air} et V, les données les moins précises. Frottements et poussée d'Archimède négligés : le plomb n'est soumis qu'à son poids, c'est une chute libre.

MÉTHODE
« Peut-on négliger A devant B ? » : calculer le rapport B/A et conclure avec un nombre. Un rapport supérieur à 100 suffit en général.

À LA CALCULATRICE



1.3.1 L'énergie potentielle de pesanteur étant nulle au niveau du sol, exprimer $E_{PP}(H)$ lors du passage à la verticale du pêcheur.

Le point H est à l'altitude h au-dessus du sol, où $E_{PP} = 0$.

$E_{PP}(H) = m\,g\,h$

1.3.2 Exprimer l'énergie cinétique $E_C(H)$ du plomb lors de son passage à la verticale du pêcheur.

$E_C(H) = \dfrac{1}{2}\,m\,v_H^2$

1.3.3 En déduire l'expression de l'énergie mécanique $E_m(H)$ du plomb lorsqu'il passe à l'altitude h.

$E_m(H) = E_C(H) + E_{PP}(H)$

$E_m(H) = \dfrac{1}{2}\,m\,v_H^2 + m\,g\,h$

1.3.4 Par conservation de l'énergie mécanique, montrer que $v_S = \sqrt{2gh + v_H^2}$ lorsque le plomb touche le sol. Calculer sa valeur.

Données utiles $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $h = 6{,}00\ \text{m}$; $v_H = 44{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

En chute libre, seul le poids agit : l'énergie mécanique se conserve entre H et le point S du sol, $E_m(S) = E_m(H)$.

Au sol l'altitude est nulle, donc $E_{PP}(S) = 0$:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_S^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_H^2 + m\,g\,h \quad \Rightarrow \quad v_S^2 = v_H^2 + 2\,g\,h$$

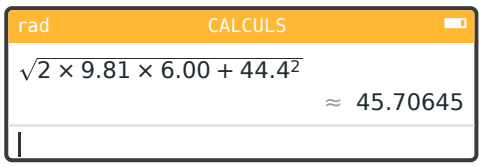
Une vitesse étant positive : $v_S = \sqrt{2\,g\,h + v_H^2}$.

$$v_S = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 6{,}00 + 44{,}4^2} = 45{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$\boxed{v_S = \sqrt{2\,g\,h + v_H^2} = 45{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$

COMPRENDRE
La masse se simplifie et l'angle α n'intervient pas : la valeur de la vitesse au sol ne dépend que de v_H et de h, pas de la direction du lancer.

À LA CALCULATRICE



1.4 En appliquant la deuxième loi de Newton dans le cadre de la chute libre, déterminer les coordonnées a_x et a_z du vecteur accélération dans le repère xOz.

Système {plomb}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, vers le bas, et l'axe Oz est orienté vers le haut.

$\boxed{a_x = 0\ ;\ a_z = -g}$

PIÈGE
Oublier le référentiel galiléen ou le bilan des forces coûte des points, même si le résultat est connu. Le signe de a_z dépend de l'orientation de l'axe Oz.

1.5 Exprimer les coordonnées $v_x(t)$ et $v_z(t)$ du vecteur vitesse, l'origine des dates étant l'instant de passage en H.

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de $a_x = 0$ et $a_z = -g$.

$v_x(t) = C_1$ et $v_z(t) = -g\,t + C_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes.

Condition initiale : à $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_H$, de coordonnées $v_H\cos\alpha$ et $v_H\sin\alpha$. Donc $C_1 = v_H\cos\alpha$ et $C_2 = v_H\sin\alpha$.

$\boxed{v_x(t) = v_H\cos\alpha\ ;\ v_z(t) = -g\,t + v_H\sin\alpha}$

MÉTHODE
Accélération, puis vitesse, puis position : à chaque étape, une primitive par coordonnée et une constante fixée par la condition initiale.

1.6 En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ du plomb en fonction de v_H, t, g et α.

$v^2 = v_x^2 + v_z^2 = v_H^2\cos^2\alpha + (-g\,t + v_H\sin\alpha)^2$

$v^2 = v_H^2\cos^2\alpha + g^2t^2 - 2\,g\,t\,v_H\sin\alpha + v_H^2\sin^2\alpha$

Avec $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$: $v^2 = v_H^2 + g^2t^2 - 2\,g\,t\,v_H\sin\alpha$.

$\boxed{v(t) = \sqrt{v_H^2 + g^2t^2 - 2\,g\,v_H\,t\sin\alpha}}$

1.7 À l'aide de l'expression de la question 1.3.4, montrer que la durée de chute vérifie $g^2t^2 - 2\,g\,v_H\,t\sin\alpha - 2\,g\,h = 0$. Vérifier que cette durée vaut 7,11 s.

Données utiles $v^2(t)$ (1.6) ; $v_S^2 = v_H^2 + 2\,g\,h$ (1.3.4) ; $\alpha = 50{,}0^\circ$

Quand le plomb touche le sol, à la date t (durée de chute), $v(t) = v_S$:

$$v_H^2 + g^2t^2 - 2\,g\,v_H\,t\sin\alpha = v_H^2 + 2\,g\,h$$

d'où $g^2t^2 - 2\,g\,v_H\,t\sin\alpha - 2\,g\,h = 0$.

En divisant par g : $g\,t^2 - 2\,v_H\sin\alpha\,t - 2\,h = 0$, équation du second degré de discriminant $\Delta = 4\,v_H^2\sin^2\alpha + 8\,g\,h > 0$.

Le produit des racines, $-2h/g$, est négatif : une seule racine est positive.

$$t = \frac{v_H\sin\alpha + \sqrt{v_H^2\sin^2\alpha + 2\,g\,h}}{g}$$

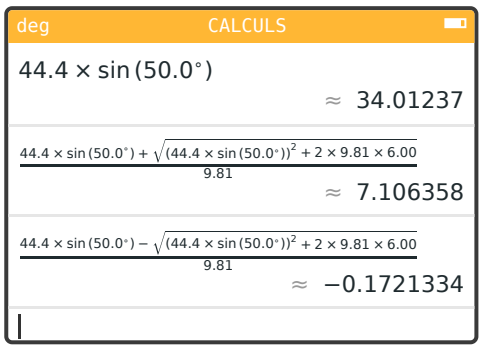
Avec $v_H\sin\alpha = 44{,}4 \times \sin 50{,}0^\circ = 34{,}01\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$:

$$t = \frac{34{,}01 + \sqrt{34{,}01^2 + 2\times 9{,}81\times 6{,}00}}{9{,}81} = 7{,}11\ \text{s}$$

$t = 7{,}11$ s, valeur attendue (l'autre racine, $-0{,}17$ s, est négative et écartée).

PIÈGE
Calculatrice en mode degrés pour $\sin 50{,}0^\circ$. Ne pas se contenter de remplacer t par 7,11 sans dire pourquoi l'autre racine est rejetée.

À LA CALCULATRICE



1.8 Montrer que les équations horaires s'écrivent $x(t) = v_H\,t\cos\alpha$ et $z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_H\,t\sin\alpha + h$.

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de v_x et v_z (1.5).

$x(t) = v_H\cos\alpha\,t + C_3$ et $z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_H\sin\alpha\,t + C_4$.

Condition initiale : à $t = 0$, le plomb est en H, de coordonnées $x_H = 0$ et $z_H = h$. Donc $C_3 = 0$ et $C_4 = h$.

$x(t) = v_H\,t\cos\alpha$; $z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_H\,t\sin\alpha + h$

PIÈGE
Oublier la constante h : l'origine du repère est au sol, sous le point H, et non au point de lancer.

1.9 En déduire la valeur de la distance $x_{\max}$ atteinte par le plomb dans les conditions du lancer.

Données utiles durée de chute $t = 7{,}11$ s (1.7) ; $v_H = 44{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 50{,}0^\circ$

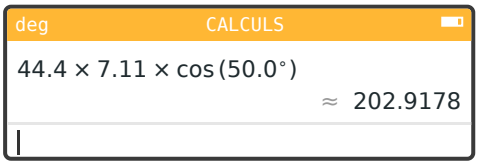
Le plomb touche le sol à la date $t = 7{,}11$ s ; son abscisse est alors $x_{\max} = v_H\,t\cos\alpha$.

$$x_{\max} = 44{,}4 \times 7{,}11 \times \cos 50{,}0^\circ = 203\ \text{m}$$

$x_{\max} = 203$ m

COMPRENDRE
Le record de France est de 263,01 m : l'ordre de grandeur est correct pour un modèle sans frottement, avec ces valeurs de v_H et α.

À LA CALCULATRICE



1.10 Déduire l'équation de la trajectoire du centre d'inertie du plomb à partir des équations horaires.

On élimine le temps : $x = v_H\, t \cos\alpha$ donne $t = \dfrac{x}{v_H \cos\alpha}$.

On reporte dans $z(t)$:

$$z = -\frac{1}{2}\, g \left(\frac{x}{v_H \cos\alpha}\right)^2 + v_H \sin\alpha \times \frac{x}{v_H \cos\alpha} + h$$

$$z(x) = -\frac{g}{2\, v_H^2 \cos^2\alpha}\, x^2 + x \tan\alpha + h$$

1.11 Quelle est la nature de la trajectoire du plomb ?

L'équation est de la forme $z = a\, x^2 + b\, x + c$ avec $a < 0$.

La trajectoire est un arc de parabole, tourné vers le bas, dans le plan vertical xOz.

1.12 À l'aide de l'équation de la trajectoire, indiquer les paramètres de lancement qui jouent un rôle dans le mouvement ultérieur du projectile.

Dans $z(x)$ figurent, outre g qui est fixé, trois grandeurs choisies au lancer.

La vitesse initiale v_H, l'angle de tir α et la hauteur de lancer h.

COMPRENDRE
La masse du plomb n'apparaît pas dans l'équation : en chute libre, elle n'a aucune influence sur la trajectoire.

2.1 Donner la définition d'une onde mécanique progressive.

Une onde mécanique progressive est la propagation d'une perturbation dans un milieu matériel, sans transport de matière mais avec transport d'énergie.

PIÈGE
Les trois éléments sont attendus : perturbation qui se propage, milieu matériel, pas de transport de matière.

2.2 L'onde se propageant à la surface de l'eau est-elle transversale ou longitudinale ? Justifier.

La surface de l'eau se déforme verticalement (selon z) alors que l'onde se propage horizontalement (selon x).

L'onde est transversale : la direction de la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation.

2.3 L'onde considérée est-elle périodique ? Justifier.

L'impact du plomb crée une seule perturbation, brève : sur la coupe, la déformation n'occupe qu'une petite zone et le reste de la surface est au repos. Le mouvement d'un point de la surface ne se reproduit pas à intervalles de temps réguliers.

L'onde n'est pas périodique.

2.4.1 L'onde atteint une feuille située en x_1 à la date t_1. Déterminer la célérité de l'onde.

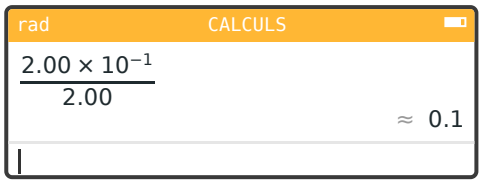
Données utiles $x_1 = 2{,}00 \times 10^{-1}$ m ; $t_1 = 2{,}00$ s ; impact en O' à $t_0 = 0$ s

L'onde part de O' ($x = 0$) à $t_0 = 0$ s et parcourt la distance x_1 pendant la durée $t_1 - t_0$:

$$v = \frac{x_1}{t_1 - t_0} = \frac{2{,}00 \times 10^{-1}}{2{,}00} = 0{,}100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$\boxed{v = 0{,}100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

À LA CALCULATRICE



2.4.2 À partir du schéma de coupe, déterminer la date t' à laquelle la feuille sera à nouveau immobile à la surface de l'eau.

Données utiles schéma : une graduation pour 10,0 cm ; $v = 0{,}100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (2.4.1) ; $t_1 = 2{,}00$ s

Sur la coupe, la perturbation s'étend sur deux graduations, de $x = 80$ cm à $x = 100$ cm : sa longueur est $L = 20{,}0 \text{ cm} = 0{,}200$ m.

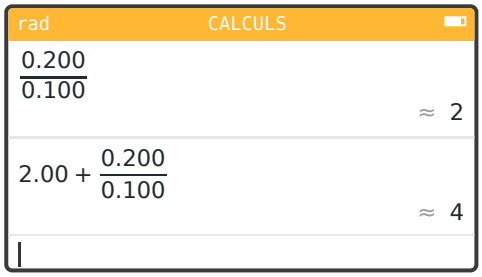
La feuille, ponctuelle, bouge du passage du début de la perturbation (date t_1) au passage de sa fin, soit pendant la durée $\Delta t = \frac{L}{v}$.

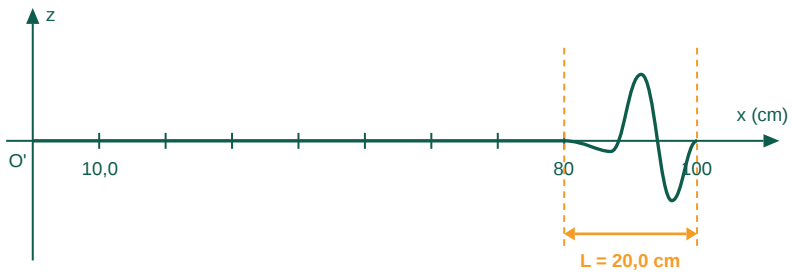
$$\Delta t = \frac{0{,}200}{0{,}100} = 2{,}00 \text{ s} \qquad t' = t_1 + \Delta t = 2{,}00 + 2{,}00$$

$\boxed{t' = 4{,}00 \text{ s}}$

COMPRENDRE
La coupe est une photographie à une date t donnée : elle donne la longueur de la perturbation. La durée du mouvement d'un point s'en déduit grâce à la célérité.

À LA CALCULATRICE





2.4.2 · Coupe de la surface de l'eau (côté des x positifs) : longueur L de la perturbation

2.5.1 Une libellule perçoit le son de l'impact à la date t_2. Déterminer la distance entre le point d'impact O' et la libellule.

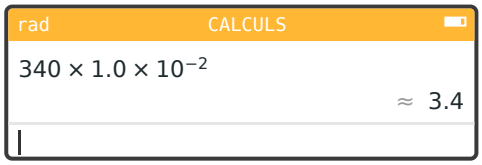
Données utiles $v_{\text{air}} = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $t_2 = 1{,}0 \times 10^{-2}$ s ; $t_0 = 0$ s

Le son, émis en O' à $t_0 = 0$ s, se propage dans l'air à la célérité v_{air} jusqu'à la libellule :

$$d_2 = v_{\text{air}} \times (t_2 - t_0) = 340 \times 1{,}0 \times 10^{-2} = 3{,}4 \text{ m}$$

$\boxed{d_2 = 3{,}4 \text{ m}}$

À LA CALCULATRICE



2.5.2 Un poisson situé à 30 m de l'impact perçoit le même son avec un retard τ par rapport à la libellule. Exprimer la date t_3 en fonction de τ et t_2, puis en déduire la célérité du son dans l'eau.

Données utiles $d_3 = 30$ m ; $\tau = 1{,}0 \times 10^{-2}$ s ; $t_2 = 1{,}0 \times 10^{-2}$ s

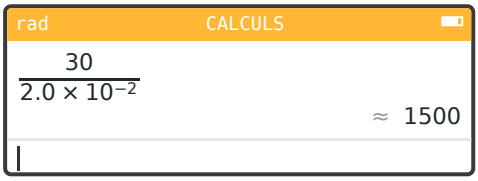
Le poisson perçoit le son après la libellule : $t_3 = t_2 + \tau = 1{,}0 \times 10^{-2} + 1{,}0 \times 10^{-2} = 2{,}0 \times 10^{-2}$ s.

Dans l'eau, le son parcourt d_3 entre $t_0 = 0$ s et t_3 :

$$v_{\text{eau}} = \frac{d_3}{t_3 - t_0} = \frac{30}{2{,}0 \times 10^{-2}} = 1{,}5 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$t_3 = t_2 + \tau = 2{,}0 \times 10^{-2}$ s ; $v_{\text{eau}} = 1{,}5 \times 10^3$ m · s^{-1}

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Diviser 30 m par le retard τ seul : τ est compté à partir de la date t_2, pas à partir de l'impact.

COMPRENDRE
Le son va plus de quatre fois plus vite dans l'eau que dans l'air : la célérité d'une onde mécanique dépend du milieu de propagation.