Suivez la flèche...

Bac S 2011 Polynésie (ancien programme) · Exercice 4 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Quelle force peut-on négliger d'après le texte introductif ?

Le texte indique que la résistance de l'air a « relativement peu d'effet ».

On peut négliger la **force de frottement exercée par l'air** sur la flèche.

COMPRENDRE
Négliger une force, c'est la comparer aux autres : ici les frottements de l'air sont très petits devant le poids de la flèche sur la durée du vol.

1.2 La poussée d'Archimède étant aussi négligeable, établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ de la flèche à partir du bilan des forces.

Système {flèche}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : seul le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ agit (frottements et poussée d'Archimède négligés).

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$.

$$\vec{a} = \vec{g}$$

COMPRENDRE
La masse se simplifie : l'accélération est la même pour toutes les flèches, lourdes ou légères. Le mouvement est une chute libre.

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton. Chaque étape oubliée coûte une partie des points.

1.3.1 À partir des équations horaires (1) et (2), montrer que l'équation de la trajectoire est $z = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha$.

Données utiles (1) $x(t) = (v_0\cos\alpha)\,t$; (2) $z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0\sin\alpha)\,t$

On isole le temps dans (1) : $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$.

On reporte dans (2) :

$$z = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha \times \frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

Dans le second terme, v_0 se simplifie et $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$:

$$z = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha$$

PIÈGE
Oublier de mettre au carré tout le quotient : v_0 et $\cos\alpha$ sont tous les deux au carré au dénominateur.

MÉTHODE
Équation de la trajectoire : éliminer t entre $x(t)$ et $z(t)$. On tire toujours t de l'équation la plus simple, celle de x.

1.3.2 Justifier la forme de la trajectoire indiquée à la fin du premier texte.

L'équation obtenue s'écrit $z = A\,x^2 + B\,x$ avec $A = -\dfrac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}$ et $B = \tan\alpha$ constants : c'est un polynôme du second degré en x.

La trajectoire est un arc de **parabole**, ce qui correspond à la trajectoire « balistique » annoncée par le texte.

COMPRENDRE
Le coefficient A est négatif : la parabole est tournée vers le bas, la flèche monte puis redescend.

2.1.1 En utilisant l'équation horaire (1), exprimer la date t_C à laquelle la flèche atteint la cible en fonction de v_0, α et x_C, abscisse du centre de la cible.

À la date t_C, la flèche est à l'abscisse x_C : d'après (1), $x_C = (v_0 \cos\alpha)\, t_C$.

$$t_C = \frac{x_C}{v_0 \cos\alpha}$$

COMPRENDRE
L'énoncé écrit « point G » pour le centre de la cible : il s'agit du point C de la figure.

2.1.2 Vérifier à l'aide d'un calcul la cohérence des valeurs numériques données dans les deux textes encadrés.

Données utiles $x_C = 70$ m ; $v_0 = 70\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 4^\circ$; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; valeurs annoncées : vol d'environ 1 s, chute d'environ 5 m

Durée du vol :

$$t_C = \frac{x_C}{v_0 \cos\alpha} = \frac{70}{70 \times \cos 4^\circ} = 1{,}0\ \text{s}$$

Le texte annonce « environ une seconde » : accord.

Distance de chute donnée par le texte : $h = \frac{1}{2} g\, t_C^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 1{,}0^2 = 4{,}9$ m, soit environ 5 m.

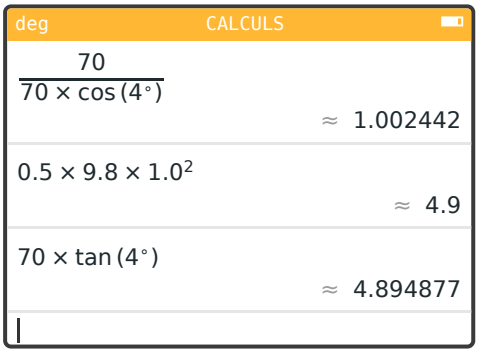
Angle : dans le triangle OAC rectangle en C, $h = x_C \tan\alpha = 70 \times \tan 4^\circ = 4{,}9$ m : un angle de 4° donne bien cette chute.

$t_C = 1{,}0$ s et $h = 4{,}9\ \text{m} \approx 5$ m : les valeurs des deux textes sont cohérentes.

PIÈGE
Calculatrice en radians : $\cos 4$ donne alors $-0{,}65$ et une durée négative. Vérifier le mode degrés.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme g et v_0. Comme $\cos 4^\circ \approx 0{,}998$, la durée du vol est pratiquement x_C / v_0.

À LA CALCULATRICE



2.2.1 Quelle hypothèse peut-on faire pour considérer que la flèche atteint le point A avec les mêmes conditions initiales de tir ? Préciser alors, en justifiant, la nature du mouvement.

Le point A est sur la droite qui porte $\vec{v}_0$: pour l'atteindre, la flèche ne doit pas être déviée. Il faut donc supposer que le poids n'agit pas (absence de pesanteur), en plus des frottements déjà négligés.

La flèche n'est alors soumise à aucune force : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$. D'après le principe d'inertie (première loi de Newton), son vecteur vitesse reste constant et égal à $\vec{v}_0$.

Hypothèse : pas de pesanteur. Le mouvement est **rectiligne uniforme**, à la vitesse v_0 le long de la droite (OA).

PIÈGE
Répondre seulement « rectiligne uniforme » sans justification : la question demande de citer le principe d'inertie et la somme des forces nulle.

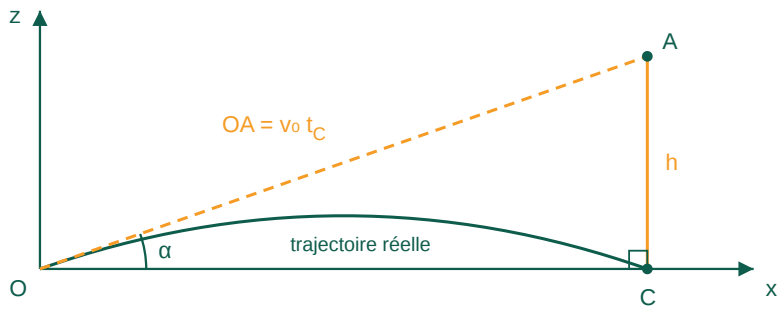
2.2.2 La durée du trajet hypothétique OA étant égale à la durée t_C du parcours parabolique OC, exprimer la distance de chute h en fonction de v_0, t_C et α.

Sur OA, le mouvement est rectiligne uniforme à la vitesse v_0 pendant la durée t_C : $OA = v_0\, t_C$.

Dans le triangle OAC rectangle en C, le côté opposé à l'angle α est $AC = h$ et l'hypoténuse est OA : $\sin\alpha = \dfrac{h}{OA}$.

$h = v_0\, t_C \sin\alpha$

MÉTHODE
On peut aussi écrire $\tan\alpha = h/x_C$ avec $x_C = v_0 \cos\alpha \times t_C$ (question 2.1.1) : on retrouve la même expression.



2.2.2 · Triangle OAC : trajet rectiligne hypothétique OA et distance de chute h

2.2.3 En utilisant l'équation horaire (2), retrouver que la distance de chute h, pour un tir réel, est égale à $\frac{1}{2}\, g\, t^2$.

Données utiles $h = v_0\, t_C \sin\alpha$ (2.2.2)

À la date t_C, la flèche est au centre C de la cible, situé sur l'axe (Ox) : $z(t_C) = 0$.

L'équation (2) donne : $0 = -\dfrac{1}{2}\, g\, t_C^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t_C$.

Le second terme est h (question 2.2.2), donc $0 = -\dfrac{1}{2}\, g\, t_C^2 + h$.

$h = \dfrac{1}{2}\, g\, t_C^2$, comme l'indique le texte.

COMPRENDRE
L'équation (2) se lit ainsi : altitude atteinte sans pesanteur, $(v_0 \sin\alpha)\, t$, moins la chute libre $\frac{1}{2}\, g\, t^2$. La flèche « tombe » sous sa ligne de visée comme un objet lâché sans vitesse.

3.1 L'angle α restant égal à 4°, comment évoluent la durée du vol et la distance de chute h quand la vitesse initiale v_0 augmente ?

$t_C = \dfrac{x_C}{v_0 \cos\alpha}$: x_C et α sont fixés, donc si v_0 augmente, t_C diminue.

$h = \dfrac{1}{2}\, g\, t_C^2$: si t_C diminue, h diminue aussi.

Quand v_0 augmente, la durée du vol **diminue** et la distance de chute h **diminue**.

PIÈGE
Raisonner avec $h = v_0\, t_C \sin\alpha$: v_0 augmente mais t_C diminue, on ne peut pas conclure. Utiliser $h = \frac{1}{2}\, g\, t_C^2$, qui ne dépend que de t_C.

3.2 Dans ces conditions, où la flèche va-t-elle frapper la cible ?

La direction de tir est inchangée : la droite (OA) et le point A restent les mêmes. La flèche arrive à la verticale de la cible à la distance h sous le point A.

Comme h est plus petite qu'avant, alors que AC n'a pas changé, le point d'impact est plus haut que C.

La flèche frappe la cible **au-dessus de son centre C**.

COMPRENDRE

Un archer qui tire plus fort doit donc viser moins haut : réduire α pour compenser une chute plus faible.