Un jeu d'enfant

Bac S 2011 Liban (ancien programme) · Exercice 1 **6 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1.1 La figurine est écartée verticalement vers le bas de sa position d'équilibre puis abandonnée. Décrire son mouvement.

Les frottements étant négligés, la figurine effectue des oscillations verticales autour de sa position d'équilibre, sans amortissement : elles sont périodiques et d'amplitude constante.

Mouvement rectiligne vertical, oscillant, périodique (oscillations libres non amorties).

COMPRENDRE
Trois mots sont attendus : la direction (verticale), la nature (oscillations de part et d'autre de l'équilibre) et le caractère périodique, qui découle de l'absence de frottements.

1.2 Définir la période du mouvement.

La période est la durée d'une oscillation complète : la plus petite durée au bout de laquelle la figurine repasse par la même position en se déplaçant dans le même sens.

PIÈGE
Oublier « dans le même sens ». Entre deux passages successifs par la position d'équilibre, il ne s'écoule qu'une demi-période.

1.3.1 Pourquoi les élèves ont-ils mesuré plusieurs périodes ?

L'incertitude du chronométrage (déclenchement et arrêt à la main) est la même pour une ou dix oscillations. En divisant la durée mesurée par 10, on divise aussi cette incertitude par 10.

Mesurer 10 périodes rend la valeur d'une période plus précise.

1.3.2 Quelle est la valeur d'une période ?

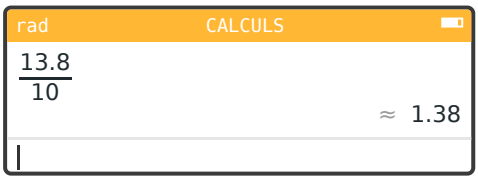
Données utiles $\Delta t = 13{,}8$ s pour 10 périodes

$\Delta t = 10\,T_0$ donc $T_0 = \dfrac{\Delta t}{10} = \dfrac{13{,}8}{10}$

$T_0 = 1{,}38$ s

COMPRENDRE
La durée mesurée a trois chiffres significatifs et 10 est un nombre exact : le résultat garde trois chiffres significatifs.

À LA CALCULATRICE



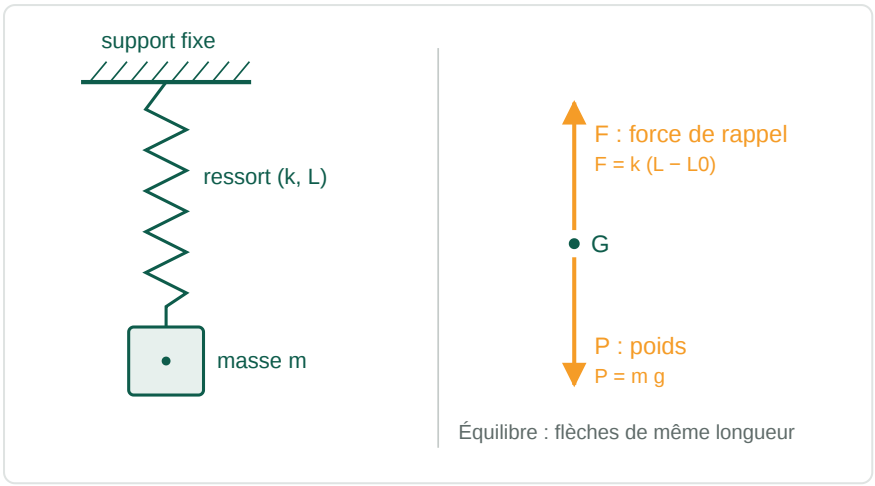
2.1 Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse marquée et le représenter sur un schéma.

Système : la masse marquée, dans le référentiel terrestre.
Frottements et poussée d'Archimède sont négligés. Deux forces :

- le poids $\vec{P}$: vertical, vers le bas, de valeur $P = m\,g$;
- la force de rappel du ressort $\vec{F}$: verticale, vers le haut (le ressort est étiré), de valeur $F = k\,(L - L_0)$.

Deux forces verticales et opposées : $\vec{P}$ vers le bas, $\vec{F}$ vers le haut.

PIÈGE
Sur le schéma, la masse est à l'équilibre : les deux flèches doivent avoir la même longueur. Une flèche plus longue que l'autre contredit la question suivante.



2.1 · Schéma du dispositif et forces appliquées à la masse (représentées à partir de G)

2.2 En étudiant l'équilibre de la masse marquée, établir l'expression de k en fonction de m, g, L_0 et L.

La masse est immobile dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
D'après la première loi de Newton (principe d'inertie) : $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$.

Les deux forces ont donc la même valeur : $m\,g = k\,(L - L_0)$.

$$k = \frac{m\,g}{L - L_0}$$

MÉTHODE
Équilibre : écrire que la somme vectorielle des forces est nulle, puis passer aux valeurs. L'allongement du ressort est $L - L_0$, pas L.

2.3 À partir de la mesure donnée, calculer la valeur numérique de k.

Données utiles $m = 20{,}0$ g ; $L = 40{,}1$ cm ; $L_0 = 25{,}5$ cm ; $g = 9{,}8\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$

Avec $m = 20{,}0 \times 10^{-3}$ kg et $L - L_0 = 40{,}1 - 25{,}5 = 14{,}6$ cm $= 0{,}146$ m :

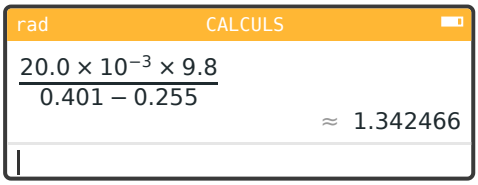
$$k = \frac{20{,}0 \times 10^{-3} \times 9{,}8}{0{,}146} = 1{,}34\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k \approx 1{,}3\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

PIÈGE
Laisser la masse en grammes ou les longueurs en centimètres : on obtient alors une valeur fausse d'un facteur 10 à 10^5.

COMPRENDRE
g n'a que deux chiffres significatifs : le résultat s'écrit $1{,}3\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. On conserve $1{,}34$ pour les calculs suivants.

À LA CALCULATRICE



3.1 Quelle est l'influence de la masse sur la période T_0 ?

Dans le tableau, quand la masse passe de 20,0 g à 70,0 g, la période passe de 0,78 s à 1,43 s.

La période T_0 augmente quand la masse augmente.

3.2 Les deux grandeurs sont-elles proportionnelles ? Justifier.

Si elles l'étaient, doubler la masse doublerait la période. Or, de 20,0 g à 40,0 g, la période passe de 0,78 s à 1,10 s, et non à $2 \times 0{,}78 = 1{,}56$ s.

T_0 et m ne sont pas proportionnelles.

MÉTHODE
Autre justification possible : calculer le quotient T_0/m pour deux colonnes du tableau et constater qu'il n'est pas constant.

3.3 Par une analyse dimensionnelle, choisir l'expression correcte de T_0 parmi (a), (b) et (c).

D'après 2.2, $k = \dfrac{m\,g}{L - L_0}$; g est une accélération, en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Donc k s'exprime en $\dfrac{\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m}} = \mathrm{kg \cdot s^{-2}}$.

- (a) $\sqrt{k/m}$: $\sqrt{\mathrm{kg \cdot s^{-2}/kg}} = \mathrm{s^{-1}}$, ce n'est pas une durée.
- (b) $\sqrt{m\,k}$: $\sqrt{\mathrm{kg^2 \cdot s^{-2}}} = \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$, ce n'est pas une durée.
- (c) $\sqrt{m/k}$: $\sqrt{\mathrm{kg/(kg \cdot s^{-2})}} = \sqrt{\mathrm{s^2}} = \mathrm{s}$, c'est une durée.

Expression (c) : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

COMPRENDRE
Le facteur 2π est un nombre sans unité : il ne joue aucun rôle dans l'analyse. L'expression (c) est aussi la seule cohérente avec 3.1 : T_0 augmente avec m.

3.4 En déduire la valeur de la masse de la figurine.

Données utiles $T_0 = 1{,}38$ s (1.3.2) ; $k = 1{,}34\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ (2.3)

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ donne $T_0^2 = 4\pi^2\,\dfrac{m}{k}$, soit $m = \dfrac{k\,T_0^2}{4\pi^2}$.

$$m = \frac{1{,}34 \times 1{,}38^2}{4\pi^2} = 6{,}5 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg}$$

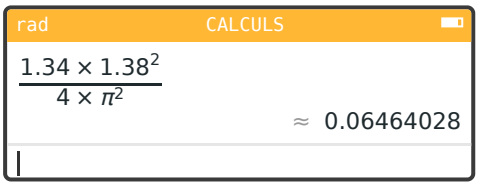
Cette valeur est cohérente avec le tableau : 1,38 s est comprise entre 1,35 s (60,0 g) et 1,43 s (70,0 g).

$m \approx 65$ g

PIÈGE
Oublier d'élever T_0 et 2π au carré en isolant m. Vérifier avec le tableau évite cette erreur : la masse doit se situer entre 60 g et 70 g.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme k. Avec k arrondi trop tôt à $1{,}3\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$, on trouverait 63 g.

À LA CALCULATRICE



4.1 En utilisant la figure 1 de l'annexe, déterminer la période et l'amplitude du mouvement.

Amplitude : la valeur maximale de z sur la figure 1 est $z_m = 0{,}070$ m.

Période : z est maximale à $t = 0$ puis de nouveau à $t \approx 1{,}4$ s. La durée entre ces deux maximums est une période.

$z_m = 0{,}070$ m et $T_0 \approx 1{,}4$ s, en accord avec la valeur 1,38 s du chronométrage.

COMPRENDRE
L'amplitude est l'écart maximal par rapport à la position d'équilibre ($z = 0$), soit 7,0 cm, et non la distance de 14 cm entre le point le plus haut et le point le plus bas.

4.2 À l'aide du tableau de la figure 2, déterminer par un calcul simple une valeur approchée de v_z à l'instant $t = 0{,}24$ s.

Données utiles $z(0{,}20\ \mathrm{s}) = 0{,}043$ m ; $z(0{,}28\ \mathrm{s}) = 0{,}020$ m

La vitesse à une date est voisine de la vitesse moyenne entre les deux dates qui l'encadrent :

$$v_z(0{,}24) \approx \frac{z(0{,}28) - z(0{,}20)}{0{,}28 - 0{,}20} = \frac{0{,}020 - 0{,}043}{0{,}08}$$

$v_z(0{,}24) \approx -0{,}29\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

COMPRENDRE
Le signe négatif indique que la figurine descend (axe orienté vers le haut). La valeur s'insère bien entre ses voisines du tableau : $-0{,}25$ et $-0{,}30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{0.020 - 0.043}{0.28 - 0.20} \approx -0.2875$$

5.1 À partir de l'expression de $z(t)$, exprimer la fonction $v_z(t)$.

La coordonnée de la vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps : $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

La dérivée de $\cos(a\,t + b)$ est $-a\,\sin(a\,t + b)$, avec ici $a = \dfrac{2\pi}{T_0}$.

$$v_z(t) = -\frac{2\pi}{T_0}\,z_m\,\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi_0\right)$$

PIÈGE

Oublier le facteur $\dfrac{2\pi}{T_0}$ qui sort de la dérivation, ou le signe « $-$ ».

5.2 Représenter l'allure de $v_z(t)$ sur le graphe de la figure 1 de l'annexe (aucune graduation de l'axe v_z n'est demandée).

D'après le tableau, $v_z = 0$ à $t = 0$, puis v_z devient négative. La courbe de v_z est une sinusoïde de même période que $z(t)$:

- v_z est nulle quand z est maximale ou minimale (la figurine fait demi-tour) ;
- v_z est extrémale quand $z = 0$: minimale quand la figurine descend, maximale quand elle monte.

Sinusoïde de période T_0, partant de 0 et commençant par décroître (voir l'annexe complétée).

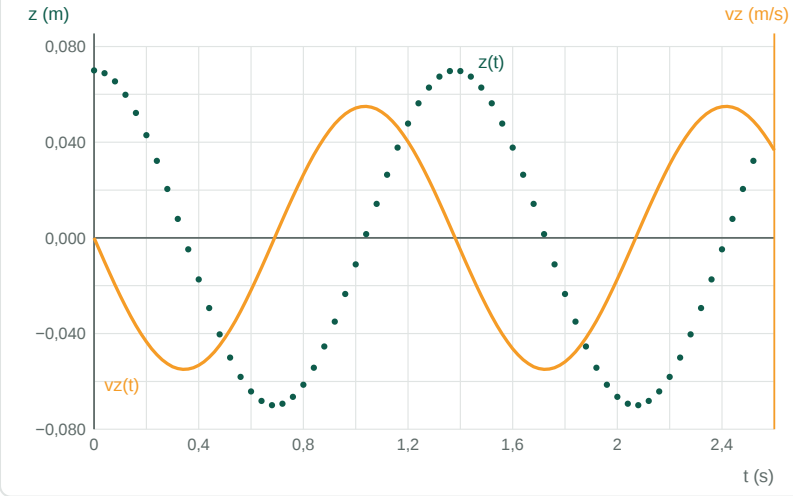
COMPRENDRE

La valeur maximale de la vitesse est $\dfrac{2\pi}{T_0}\,z_m \approx 0{,}32\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$: c'est bien la plus grande valeur du tableau, atteinte à $t = 0{,}36$ s, près du passage par $z = 0$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{2 \times \pi \times 0.070}{1.38} \approx 0.3187123$$



5.2 · Figure 1 de l'annexe complétée : allure de vz(t) en orange (axe de droite, sans graduation)

5.3 En utilisant les conditions initiales du mouvement, déterminer la valeur de φ_0.

À $t = 0$, la figurine est à sa position la plus haute : $z(0) = z_m$.

Or $z(0) = z_m\cos(\varphi_0)$, donc $\cos(\varphi_0) = 1$.

$$\varphi_0 = 0$$

COMPRENDRE

On vérifie avec la seconde condition initiale : $v_z(0) = -\dfrac{2\pi}{T_0}\,z_m\,\sin(0) = 0$, comme dans le tableau.

6.1 Laquelle des deux courbes de la figure 3 correspond à l'énergie cinétique ? Justifier.

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$. À $t = 0$, la vitesse est nulle, donc l'énergie cinétique est nulle. Seule la courbe 2 part de zéro à $t = 0$.

La courbe 2 représente l'énergie cinétique ; la courbe 1 représente l'énergie potentielle totale.

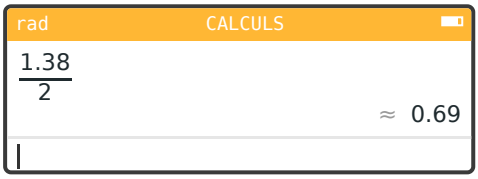
6.2 Comparer la période des énergies à la période de l'oscillateur.

Sur la figure 3, la courbe 1 est maximale à $t = 0$ et retrouve son maximum pour la deuxième fois vers $t \approx 1{,}4$ s : deux périodes des énergies durent environ 1,4 s, soit $T_E \approx 0{,}7$ s.

$T_E \approx 0{,}7 \text{ s} = \frac{T_0}{2}$: la période des énergies est la moitié de celle de l'oscillateur.

COMPRENDRE
E_c dépend de v^2 : elle est la même que la figurine monte ou descende. Elle s'annule donc deux fois par oscillation, à chaque demi-tour.

À LA CALCULATRICE



6.3 En quoi les courbes de la figure 3 montrent-elles que les forces de frottement peuvent être négligées ?

Quand une énergie est maximale, l'autre est nulle, et les deux courbes ont le même maximum, qui ne diminue pas d'une oscillation à la suivante. La somme $E_c + E_p$ garde donc la même valeur à chaque instant.

L'énergie mécanique se conserve : aucune énergie n'est dissipée, les frottements sont négligeables.

COMPRENDRE
Avec des frottements, l'énergie mécanique diminuerait au cours du temps : les maximums des deux courbes seraient de plus en plus bas.