Bobine d'une pédale wha-wha

Bac S 2011 Asie (ancien programme) · Exercice 4 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Déterminer la période de la tension délivrée par le GBF, puis en déduire sa fréquence.

Données utiles document 2 : courbe $i(t)$, de même période que la tension du GBF

L'intensité $i(t)$ a la même période que la tension du générateur. Sur le document 2, deux maximums successifs se trouvent en $t = 2{,}0$ ms et $t = 4{,}0$ ms : $T = 2{,}0$ ms.

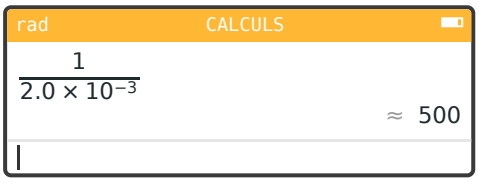
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2{,}0 \times 10^{-3}}$$

$T = 2{,}0$ ms et $f = 5{,}0 \times 10^{2}$ Hz

PIÈGE
Laisser la période en millisecondes dans le calcul : on trouverait 0,50 au lieu de 500 Hz.

COMPRENDRE
La lecture graphique donne deux chiffres significatifs (2,0 ms) : la fréquence s'écrit donc $5{,}0 \times 10^{2}$ Hz.

À LA CALCULATRICE



1.2 Quel traitement mathématique demander au logiciel pour obtenir la courbe de l'intensité en fonction du temps ?

Données utiles $u_{AM}(t) = -R\,i(t)$; $R = 10\ \text{k}\Omega$

L'interface mesure la tension $u_{AM}(t)$ sur la voie 2. Comme $u_{AM}(t) = -R\,i(t)$, on demande au logiciel de calculer, à chaque instant, l'opposé de cette tension divisé par la résistance, avec $R = 10 \times 10^{3}\ \Omega$.

$$i(t) = -\frac{u_{AM}(t)}{R}$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » : la flèche de u_{AM} est dans le même sens que i (convention générateur), la courbe obtenue serait inversée.

COMPRENDRE
Une interface d'acquisition ne mesure que des tensions. Le conducteur ohmique sert de capteur de courant : sa tension est proportionnelle à i.

1.3 Expliquer pourquoi on peut écrire $i(t) = a\,t + b$ pendant des intervalles égaux à une demi-période.

Sur le document 2, la courbe $i(t)$ est triangulaire : sur chaque demi-période (par exemple entre 1,0 ms et 2,0 ms, puis entre 2,0 ms et 3,0 ms), elle est formée d'un segment de droite.

Sur chaque demi-période, i est une fonction affine du temps : $i(t) = a\,t + b$, avec a positif quand i augmente et négatif quand i diminue.

COMPRENDRE
Les coefficients a et b changent d'une demi-période à la suivante : la pente garde la même valeur absolue mais change de signe.

1.4 Donner l'expression littérale de $u_{BM}(t)$ en fonction de L et de $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

La bobine est fléchée en convention récepteur et sa résistance interne est négligée.

$$u_{BM}(t) = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

COMPRENDRE
Avec une résistance interne r, on aurait $u_{BM} = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + r\,i$. Ici, i affine donne une tension constante par demi-période : c'est le signal en créneaux du document 3.

1.5 À partir de la modélisation, calculer $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ dans l'intervalle [3,0 ms ; 4,0 ms], puis déterminer la valeur de l'inductance L.

Données utiles sur [3,0 ms ; 4,0 ms] : $i(t) = 1{,}19\,t - 0{,}0042$ (i en A, t en s) ; $u_{BM} = 0{,}26$ V

La dérivée de la fonction affine est son coefficient directeur : $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 1{,}19\ \mathrm{A\cdot s^{-1}}$.

D'après la question 1.4 : $L = \dfrac{u_{BM}}{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$

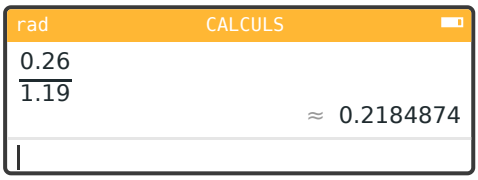
$$L = \frac{0{,}26}{1{,}19} = 0{,}22\ \mathrm{H}$$

$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 1{,}19\ \mathrm{A\cdot s^{-1}}$ et $L = 0{,}22\ \mathrm{H}$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme u_{BM}. La valeur est inférieure aux 0,50 H recherchés : Tony doit encore ajouter des spires à sa bobine.

MÉTHODE
Vérifier l'ordre de grandeur sur le document 2 : i passe d'environ $-560\ \mu$A à $+570\ \mu$A en 1,0 ms, soit une pente voisine de $1{,}1\ \mathrm{A\cdot s^{-1}}$.

À LA CALCULATRICE



2.1 Établir l'équation différentielle (1) vérifiée par $u_c(t)$ en précisant la loi utilisée.

Loi des mailles (additivité des tensions), interrupteur fermé et résistance négligée : $u_c + u_L = 0$.

Bobine en convention récepteur : $u_L = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Condensateur en convention récepteur : $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u_c$, donc $i = C\,\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ (C constante), puis $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C\,\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2}$.

En remplaçant : $u_c + LC\,\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} = 0$, puis on divise par LC.

$$\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\,u_c = 0$$

PIÈGE
Écrire $u_c = u_L$ sans regarder les flèches : sur le document 4 elles se suivent le long de la maille, leur somme est nulle. Un signe faux donne une équation sans oscillations.

MÉTHODE
Toujours trois étapes : 1) loi des mailles ; 2) relation tension-courant de chaque dipôle, avec sa convention ; 3) tout exprimer en fonction de la seule grandeur demandée, ici u_c.

2.2 Nommer le régime des oscillations observées sur le document 5.

La tension u_c oscille autour de zéro avec une amplitude qui diminue au cours du temps.

Le régime est **pseudo-périodique**.

COMPRENDRE
Le régime serait périodique si l'amplitude restait constante (résistance nulle), et apériodique, sans oscillation, si la résistance était trop grande.

2.3 À partir du document 5, déterminer précisément le temps caractéristique T des oscillations en expliquant la méthode.

T est la pseudo-période. Pour réduire l'incertitude de lecture, on mesure la durée de plusieurs pseudo-périodes.

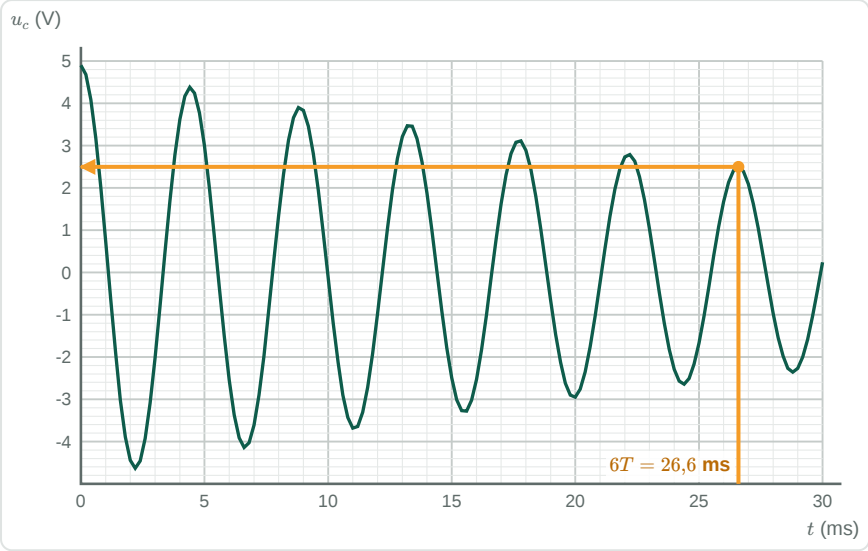
La courbe part d'un maximum en $t = 0$; le sixième maximum suivant est atteint en $t = 26{,}6$ ms. Ces deux dates sont séparées par six pseudo-périodes :

$$T = \frac{26{,}6}{6} = 4{,}43\ \mathrm{ms}$$

$T \approx 4{,}4\ \mathrm{ms}$

PIÈGE
Se tromper d'un en comptant : entre le maximum initial et le sixième suivant, il y a six intervalles, pas sept.

MÉTHODE
Mesurer n périodes puis diviser par n : l'erreur de lecture est elle aussi divisée par n. On peut aussi compter entre deux passages par zéro dans le même sens.



2.3 · Document 5 : six pseudo-périodes entre le maximum initial et le sixième maximum suivant

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{26.6}{6} \approx 4.433333$

2.4 En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine fabriquée par Tony.

Données utiles $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$; $C = 1{,}0\ \mu\text{F}$; $T = 4{,}43$ ms (2.3)

L'amortissement est faible : la pseudo-période est pratiquement égale à la période propre, $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

On élève au carré : $T^2 = 4\pi^2 LC$, d'où $L = \dfrac{T^2}{4\pi^2 C}$.

$$L = \frac{(4{,}43 \times 10^{-3})^2}{4\pi^2 \times 1{,}0 \times 10^{-6}} = 0{,}50\ \text{H}$$

$L = 0{,}50$ H

PIÈGE
Conversions : T en secondes et C en farads ($1{,}0\ \mu\text{F} = 1{,}0 \times 10^{-6}$ F). Ne pas oublier le carré sur T et sur 2π.

COMPRENDRE
Tony obtient cette fois l'inductance de 0,50 H recherchée pour sa pédale.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{(4.43 \times 10^{-3})^2}{4 \times \pi^2 \times 1.0 \times 10^{-6}} \approx 0.4971045$

3.1 Par un raisonnement physique simple, identifier les courbes 1 et 2 du document 6.

À $t = 0$, le condensateur est chargé : u_c est maximale, donc l'énergie électrique $E_{\text{él}} = \dfrac{1}{2} C\, u_c^2$ est maximale. Le circuit vient d'être fermé : $i = 0$, donc l'énergie magnétique $E_m = \dfrac{1}{2} L\, i^2$ est nulle.

Sur le document 6, la courbe 2 (trait plein) part de sa valeur maximale à $t = 0$ et la courbe 1 (pointillés) part de zéro.

Courbe 2 : énergie électrique $E_{\text{él}}$ du condensateur ; courbe 1 : énergie magnétique E_m de la bobine.

COMPRENDRE
Les deux énergies varient en opposition : quand le condensateur est déchargé ($u_c = 0$), l'intensité est maximale et l'énergie est dans la bobine.

3.2 Quel est le phénomène à l'origine de la diminution de l'énergie stockée dans le circuit ?

La résistance totale du circuit (fil de la bobine, connexions) n'est pas nulle. À chaque passage du courant, une partie de l'énergie est convertie en énergie thermique, cédée au milieu extérieur.

La diminution de l'énergie totale est due à l'**effet Joule** dans la résistance du circuit.

COMPRENDRE
C'est cette perte qui fait décroître les maximums du document 6 et l'amplitude de u_c sur le document 5.