Le saut à l'élastique

Bac S 2011 Inde (Pondichéry) (ancien programme) · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Montrer, en comparant sa valeur à celle du poids du système S, qu'il est légitime de négliger la poussée d'Archimède.

Données utiles $m = 84{,}0\ \text{kg}$; $V = 0{,}25\ \text{m}^3$; $\rho = 1{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

La poussée d'Archimède a pour valeur le poids de l'air déplacé : $\Pi = \rho V g$.

$\Pi = 1{,}3 \times 0{,}25 \times 9{,}8 = 3{,}2\ \text{N}$

Poids du système : $P = m g = 84{,}0 \times 9{,}8 = 8{,}2 \times 10^2\ \text{N}$

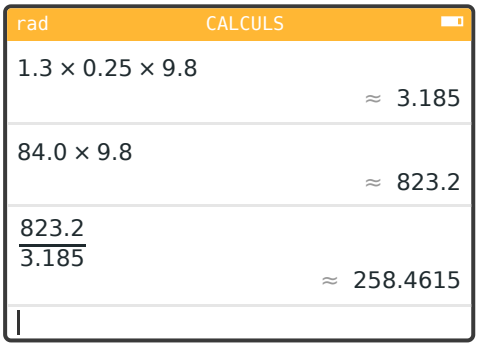
$\dfrac{P}{\Pi} = \dfrac{8{,}2 \times 10^2}{3{,}2} \approx 2{,}6 \times 10^2$

$\Pi = 3{,}2\ \text{N}$ est environ 260 fois plus petite que $P = 8{,}2 \times 10^2\ \text{N}$: la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids.

PIÈGE
Utiliser la masse volumique du sauteur, ou sa masse, dans Π. La poussée d'Archimède fait intervenir le fluide déplacé : ici l'air, avec le volume V du système.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme ρ, V et g, les données les moins précises. Une comparaison se conclut par un rapport chiffré, pas seulement par « P est plus grand ».

À LA CALCULATRICE



1.2 À partir d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité de la constante μ dans le Système international.

Données utiles $f = \mu v^2$

$\mu = \dfrac{f}{v^2}$

Une force est le produit d'une masse par une accélération : $[f] = \text{M}\cdot\text{L}\cdot\text{T}^{-2}$.

Une vitesse est une longueur divisée par une durée : $[v^2] = \text{L}^2\cdot\text{T}^{-2}$.

$$[\mu] = \frac{\text{M}\cdot\text{L}\cdot\text{T}^{-2}}{\text{L}^2\cdot\text{T}^{-2}} = \text{M}\cdot\text{L}^{-1}$$

μ s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$.

PIÈGE
Répondre « $\text{N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{m}^{-2}$ » sans aller plus loin : le newton n'est pas une unité de base, il faut le décomposer en $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

MÉTHODE
Isoler la grandeur cherchée, remplacer chaque grandeur par sa dimension (M, L, T), simplifier, puis traduire en unités SI : M en kg, L en m, T en s.

1.3 Écrire, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la seconde loi de Newton appliquée au système S.

Système S {sauteur et équipement}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces extérieures : le poids $\vec{P}$, vertical vers le bas ; la force de frottement $\vec{f}$, verticale vers le haut (opposée au mouvement). La poussée d'Archimède est négligée (1.1).

$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$

PIÈGE
Oublier le bilan des forces, ou y laisser la poussée d'Archimède alors que le sujet demande de la négliger dans toute la suite.

1.4 Que devient cette relation vectorielle projetée sur un axe vertical Ox orienté vers le bas ?

Sur l'axe Ox orienté vers le bas : $P_x = +P$ (poids dans le sens de l'axe) et $f_x = -f$ (frottement en sens contraire).

$$P - f = m\,a_x$$

COMPRENDRE
Le signe de chaque terme vient du sens de la force par rapport à l'axe. Avec un axe vers le bas, la chute donne $v_x > 0$ et le poids est compté positivement.

1.5 En déduire l'équation différentielle vérifiée par $v_x(t)$ et vérifier qu'elle est de la forme $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + B\,v_x^2 = A$, où A et B sont deux constantes.

Avec $P = m\,g$, $f = \mu\,v^2 = \mu\,v_x^2$ (mouvement vertical : $v^2 = v_x^2$) et $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$:

$$m\,g - \mu\,v_x^2 = m\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

En divisant par m et en regroupant les termes en v_x à gauche :

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mu}{m}\,v_x^2 = g$$, de la forme attendue avec $A = g$ et $B = \dfrac{\mu}{m}$.

PIÈGE
Oublier de diviser par m : le coefficient de $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ doit valoir 1 avant d'identifier A et B.

1.6 Avec quelles unités s'expriment A et B ? Déterminer A et B en fonction des données et vérifier que $B = 9{,}3 \times 10^{-3}$ unité SI.

Données utiles $A = g$ et $B = \dfrac{\mu}{m}$ (1.5) ; $\mu = 0{,}78\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}}$ (1.2) ; $m = 84{,}0\ \mathrm{kg}$; $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

$A = g$: A est une accélération, en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, et $A = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

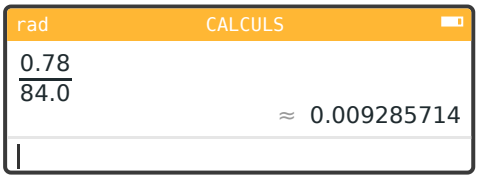
$B = \dfrac{\mu}{m}$: B s'exprime en $\dfrac{\mathrm{kg \cdot m^{-1}}}{\mathrm{kg}} = \mathrm{m^{-1}}$.

$$B = \frac{0{,}78}{84{,}0} = 9{,}3 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^{-1}}$$

$A = g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $B = \dfrac{\mu}{m} = 9{,}3 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^{-1}}$, valeur attendue.

COMPRENDRE
Contrôle d'homogénéité : $B\,v_x^2$ est en $\mathrm{m^{-1}} \times \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}} = \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, comme $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ et comme A. Les trois termes de l'équation sont bien des accélérations.

À LA CALCULATRICE



1.7 En déduire l'expression de la vitesse limite v_{lim} en fonction de m, g et μ, puis calculer sa valeur.

Données utiles $m = 84{,}0\ \mathrm{kg}$; $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $\mu = 0{,}78\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}}$

Quand la vitesse limite est atteinte, $v_x = v_{\mathrm{lim}}$ est constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation différentielle devient $\dfrac{\mu}{m}\,v_{\mathrm{lim}}^2 = g$, soit

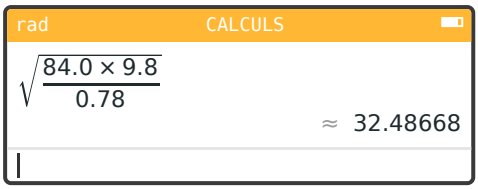
$$v_{\mathrm{lim}} = \sqrt{\frac{m\,g}{\mu}} = \sqrt{\frac{84{,}0 \times 9{,}8}{0{,}78}}$$

$$v_{\mathrm{lim}} = \sqrt{\frac{m\,g}{\mu}} = 32\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

PIÈGE
Oublier la racine carrée : le frottement est en v^2, pas en v. Sans racine, on trouve une valeur en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$, qui n'est pas une vitesse.

COMPRENDRE
À la vitesse limite, le frottement compense exactement le poids : $\mu\,v_{\mathrm{lim}}^2 = m\,g$. La somme des forces est nulle et le mouvement devient rectiligne uniforme. Cela représente environ $117\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

À LA CALCULATRICE



1.8 L'équation différentielle est résolue par la méthode d'Euler (extrait de feuille de calcul). 1.8.1. Quel est le pas Δt utilisé ? 1.8.2. Déterminer par le calcul la vitesse $v_x(t = 0{,}80\ \text{s})$ absente du tableau.

Données utiles $v_x(0{,}60) = 5{,}85\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $A = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $B = 9{,}3 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1}$ (1.6)

1.8.1. Le pas est la durée qui sépare deux dates consécutives du tableau : $\Delta t = t_{i+1} - t_i = 0{,}20 - 0{,}00 = 0{,}20$ s.

1.8.2. D'après l'équation différentielle, à la date t_i : $\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_i} = A - B\,v_x^2(t_i)$.

La relation d'Euler s'écrit donc, entre $0{,}60$ s et $0{,}80$ s :

$$v_x(0{,}80) = v_x(0{,}60) + \left[A - B\,v_x^2(0{,}60)\right]\Delta t$$

$$v_x(0{,}80) = 5{,}85 + \left(9{,}8 - 9{,}3 \times 10^{-3} \times 5{,}85^2\right) \times 0{,}20$$

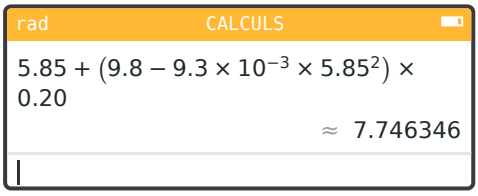
$\Delta t = 0{,}20$ s ; $v_x(0{,}80) = 7{,}75\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

PIÈGE
Calculer l'accélération avec une autre vitesse que celle de la date précédente ($5{,}85\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$), ou oublier le carré sur v_x.

COMPRENDRE
Vérification : la valeur trouvée s'intercale bien entre $5{,}85$ et $9{,}60\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, et les écarts successifs diminuent, car l'accélération décroît quand la vitesse augmente.

MÉTHODE
Un pas d'Euler : 1) calculer l'accélération à la date t_i avec l'équation différentielle ; 2) la multiplier par Δt ; 3) ajouter le résultat à $v_x(t_i)$.

À LA CALCULATRICE



2.1 Comment qualifie-t-on de telles oscillations ? Justifier. Calculer le temps caractéristique T associé aux oscillations et le nommer.

Données utiles 4 allers et retours en 40 s

Le sauteur oscille sans être entretenu par un apport extérieur, et le mouvement cesse au bout de 40 s : l'amplitude diminue au cours du temps à cause des frottements. Ce sont des oscillations **libres amorties** (régime pseudo-périodique).

Le temps caractéristique est la **pseudo-période** T, durée d'un aller et retour : $T = \frac{40}{4}$.

Oscillations libres amorties ; pseudo-période $T = 10$ s.

PIÈGE
Parler de « période » : le mouvement ne se reproduit pas identique à lui-même puisque l'amplitude décroît. Le terme attendu est pseudo-période.

2.2 Si on assimile l'élastique à un ressort de raideur k relié à une masse m, quelle est l'expression de la période propre T_0 des oscillations libres ?

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

COMPRENDRE
Contrôle par les unités : k en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1} = \text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$, donc $\frac{m}{k}$ est en s^2 et sa racine en secondes. Une masse plus grande ou un ressort plus souple allonge la période.

2.3 Calculer la valeur de T_0 et interpréter la différence observée entre les valeurs de T et T_0.

Données utiles $k = 38{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $m = 84{,}0\ \text{kg}$; $T = 10\ \text{s}$ (2.1)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{84{,}0}{38{,}0}} = 9{,}34\ \text{s}$$

La pseudo-période mesurée, $T = 10$ s, est supérieure à la période propre T_0. La période propre correspond à un oscillateur sans frottement ; ici les frottements de l'air ne sont pas négligeables : ils amortissent le mouvement et allongent la durée de chaque oscillation.

$T_0 = 9{,}34\ \text{s} < T = 10\ \text{s}$: l'écart s'explique par l'amortissement dû aux frottements.

PIÈGE

Oublier le facteur 2π ou inverser le rapport en écrivant $\frac{k}{m}$: l'unité obtenue ne serait plus la seconde.

COMPRENDRE

Quand l'amortissement est faible, la pseudo-période est pratiquement égale à la période propre. Un écart de l'ordre de 7 % montre un amortissement notable, cohérent avec un mouvement qui s'arrête après seulement 4 oscillations.

À LA CALCULATRICE

