Bac S Pondichéry 2011 EXERCICE 2 : Le saut à l'élastique (5 points)

« **Rite initiatique ancestral** pratiqué sur **l'île de la Pentecôte**, dans l'archipel de **Vanuatu** au cœur du Pacifique, le saut dans le vide avec les chevilles attachées est devenu un sport extrême. »

D'après http://www.saut-elastique.com

À l'origine, les jeunes gens sautaient du haut d'une tour seulement retenus par une liane. De nos jours, les amateurs de sensations fortes plongent, souvent du haut d'un pont, équipés d'un « élastique » en latex ; un « élastique » est en réalité constitué d'un assemblage de 1000 à 2000 fils ronds en latex extrudé.
L'observation d'un saut peut conduire à se poser quelques questions : Quelle est la vitesse du sauteur quand l'élastique le rappelle la première fois ? Pendant combien de temps, le sauteur oscille-t-il ? etc.
Des mesures expérimentales peuvent, certes, y répondre mais l'utilisation d'un modèle peut aussi permettre de prévoir les réponses. C'est modestement ce que propose cet exercice...

1. Première phase du saut à l'élastique. Un peu d'adrénaline…

Considérons la première phase d'un saut à l'élastique, lorsque un sauteur et son équipement, de masse m = 84,0 kg, se laisse tomber sans vitesse initiale d'un pont dont le plateau se trouve à une hauteur h = 270 m du sol.

On peut considérer que le volume du sauteur et de son équipement est : V = 0,25 m^3. Par ailleurs l'ensemble des actions exercées par l'air, outre la poussée d'Archimède, sur le sauteur peut être modélisé par une force de frottement dont la valeur f est proportionnelle au carré de la vitesse acquise : $f = \mu . v^2$ où μ = 0,78 unité SI.

Données:

Masse volumique de l'air : $\rho = 1{,}3\ kg.m^{-3}$
Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$

1.1. Montrer qu'il est légitime de ne pas prendre en compte la poussée d'Archimède, en comparant sa valeur à celle du poids du système S, constitué par le sauteur et son équipement. **On négligera donc cette poussée dans tout ce qui suit**.

1.2. À partir d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité avec laquelle s'exprime la constante μ, dans le Système International.

1.3. Écrire, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la seconde loi de Newton appliquée au système S.

1.4. Que devient cette relation vectorielle projetée sur un axe vertical Ox orienté vers le bas ?

1.5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v_x(t)$ au cours de cette première chute et vérifier qu'elle est de la forme : $\frac{dv_x(t)}{dt} + Bv_x^2(t) = A$ où A et B sont deux constantes.

1.6. Avec quelles unités s'expriment A et B ? Déterminer A et B en fonction des données et vérifier que $B = 9{,}3.10^{-3}$ unité SI.

1.7. En déduire l'expression de la vitesse limite v_{lim} (en fonction de m, g et μ) puis calculer sa valeur.

1.8. La résolution de l'équation différentielle établie précédemment est obtenue par la méthode numérique itérative d'Euler. Un extrait de la feuille de calcul est représenté ci-dessous.

Date t (s)	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	…
Vitesse v_x(m.s^{-1})	0,00	1,96	3,92	5,85		9,60	11,4	...

1.8.1. Quel est le pas Δt utilisé pour effectuer les calculs de $v_x(t)$?

1.8.2. La méthode d'Euler permet de prévoir, par le calcul, l'évolution de la composante v_x de la vitesse du système S au cours du temps. La détermination de $v_x(t_{i+1})$ est possible si celle de $v_x(t_i)$ est connue en appliquant la relation $v_x(t_{i+1}) = v_x(t_i) + \left[\frac{dv_x(t)}{dt}\right]_{t=t_i} .\Delta t$

Déterminer par le calcul, la vitesse v_x(t =0,80 s) absente du tableau.

2. Deuxième phase du saut à l'élastique.

À partir de la date t = 5,0 s, le sauteur remonte sous l'action de l'élastique puis oscille verticalement pendant 40 s, effectuant 4 allers et retours.

2.1. Comment qualifie-t-on de telles oscillations ? Justifier. Calculer le temps caractéristique T associé aux oscillations et le nommer.

2.2. Si on assimile l'élastique à un ressort de raideur k relié à une masse m, quelle est l'expression de la période propre T_0 des oscillations libres ?

2.3. Calculer la valeur de T_0 et interpréter la différence observée entre les valeurs de T et T_0.

Donnée: k = 38,0 N.m^{-1}.