Sur la Lune

Bac S 2011 Antilles-Guyane rattrapage (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la plume et sur le marteau à l'instant où ils sont lâchés.

Il n'y a pas d'atmosphère sur la Lune : aucune force de frottement ni poussée d'Archimède. Une fois lâché, chaque objet n'est plus en contact avec rien.

Chaque objet est soumis à une seule force, son poids lunaire : $\vec{P}_P$ pour la plume, $\vec{P}_M$ pour le marteau.

COMPRENDRE
Un objet soumis à son seul poids est en chute libre. Sur Terre, la plume ne l'est pas : les frottements de l'air sont comparables à son poids.

1.1.2 Donner l'expression de ces forces en fonction du vecteur champ de pesanteur lunaire $\vec{g}_L$.

$\vec{P}_P = m_P\,\vec{g}_L$ et $\vec{P}_M = m_M\,\vec{g}_L$

PIÈGE
La question porte sur des vecteurs. Écrire $P = m\,g_L$ sans flèches ne donne que la norme et ne permet pas de conclure sur le vecteur accélération à la question suivante.

1.1.3 En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que les deux objets ont le même vecteur accélération, que l'on précisera.

Système {marteau}, de masse m_M constante ; référentiel lunaire supposé galiléen ; seule force : $\vec{P}_M$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_M\,\vec{a}_M$, soit $m_M\,\vec{g}_L = m_M\,\vec{a}_M$, donc $\vec{a}_M = \vec{g}_L$.

Même raisonnement pour le système {plume} : $m_P\,\vec{g}_L = m_P\,\vec{a}_P$, donc $\vec{a}_P = \vec{g}_L$.

$\vec{a}_M = \vec{a}_P = \vec{g}_L$: vecteur vertical, dirigé vers le sol lunaire, de norme g_L, indépendant de la masse.

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton. La masse se simplifie dès que le poids est la seule force.

1.2.1 Lequel des deux graphiques correspond à la trajectoire de G ?

La trajectoire est l'ensemble des positions occupées par G : elle se trace dans le plan $(x\,;\,y)$. Le marteau, lâché sans vitesse initiale, tombe verticalement : x reste nul pendant que y diminue.

La trajectoire est donnée par le **graphique 1** (segment de droite vertical). Le graphique 2 représente y en fonction du temps.

PIÈGE
La courbe du graphique 2 ressemble à une trajectoire parabolique, mais son axe horizontal est le temps : ce n'est pas une trajectoire.

1.2.2 Quelles sont les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}_M$ de G dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$?

Données utiles $\vec{a}_M = \vec{g}_L$ (1.1.3)

$\vec{g}_L$ est vertical et dirigé vers le bas, alors que $\vec{j}$ est dirigé vers le haut : $\vec{g}_L = -g_L\,\vec{j}$.

$$\vec{a}_M \begin{cases} a_{Mx} = 0 \\ a_{My} = -g_L \end{cases}$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » : l'axe Oy est orienté vers le haut et g_L désigne une norme, donc un nombre positif.

1.2.3 Quelles sont les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}_M$ de G ?

$\vec{a}_M = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_M}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de chaque coordonnée de l'accélération.

$v_{Mx} = C_1$ et $v_{My} = -g_L\,t + C_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes.

Condition initiale : le marteau est lâché sans vitesse, $\vec{v}_M(0) = \vec{0}$, donc $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$.

$$\vec{v}_M \begin{cases} v_{Mx} = 0 \\ v_{My} = -g_L\,t \end{cases}$$

MÉTHODE
Chaque primitive apporte une constante, fixée par la valeur de la grandeur à $t = 0$. Justifier cette valeur par une phrase du sujet (ici « il les lâcha »).

1.2.4 En déduire, en fonction du temps, la norme v_M du vecteur vitesse. En quoi le graphique 3 est-il compatible avec cette expression ?

$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \sqrt{0^2 + (-g_L\,t)^2} = g_L\,t$ car $g_L > 0$ et $t \geqslant 0$.

v_M est donc proportionnelle au temps, avec un coefficient positif. Le graphique 3 est une droite croissante qui passe par l'origine : il traduit bien une relation $v_M = k\,t$ avec $k > 0$.

$v_M = g_L\,t$, fonction linéaire du temps, en accord avec la droite passant par l'origine du graphique 3.

PIÈGE
Écrire $v_M = -g_L\,t$: une norme n'est jamais négative. Le signe « $-$ » appartient à la coordonnée v_{My}.

1.2.5 À partir du graphique 3, déterminer la valeur du champ de pesanteur lunaire g_L.

D'après $v_M = g_L\,t$, g_L est le coefficient directeur de la droite du graphique 3.

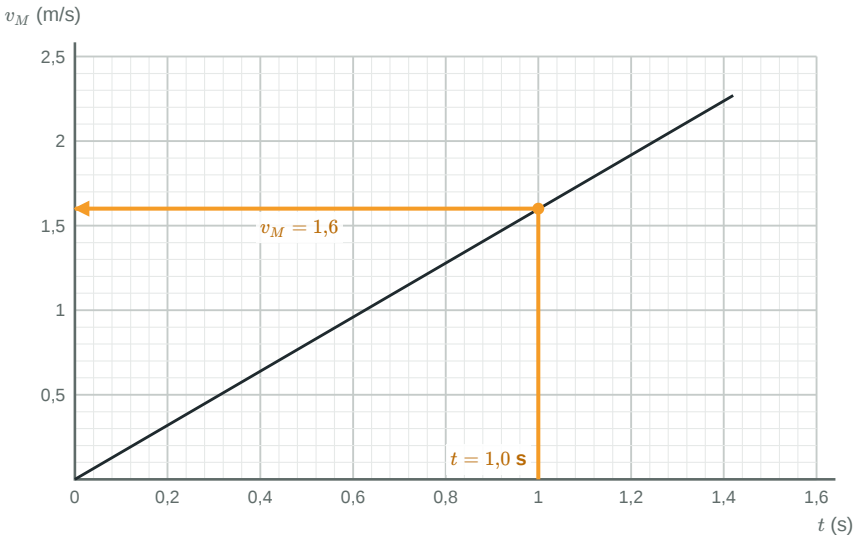
La droite passe par l'origine et par le point A $(1{,}0\ \mathrm{s}\ ;\ 1{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})$:

$$g_L = \frac{v_M(A) - 0}{t_A - 0} = \frac{1{,}6}{1{,}0}$$

$g_L = 1{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

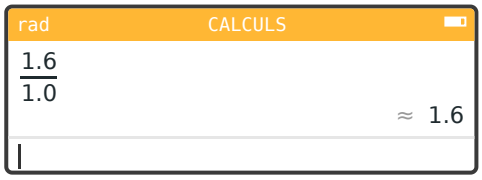
COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement : la lecture graphique ne permet pas mieux. La valeur est environ six fois plus faible que sur Terre ($9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$).

MÉTHODE
Pour un coefficient directeur, choisir un point de la droite éloigné de l'origine et facile à lire sur le quadrillage, pas un point de mesure isolé.



1.2.5 · Graphique 3 du sujet, avec le point utilisé pour le coefficient directeur

À LA CALCULATRICE



2.1 Établir l'équation horaire du mouvement $y(t)$.

Données utiles $v_{My} = -g_L\,t$ (1.2.3) ; $h = 1{,}50$ m

$v_{My} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -g_L\,t$, donc par primitive : $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g_L\,t^2 + C_3$.

Condition initiale : à $t = 0$, G est à la hauteur h au-dessus du sol, $y(0) = h$, donc $C_3 = h$.

$$y(t) = -\frac{1}{2}\,g_L\,t^2 + h$$

PIÈGE
Prendre $C_3 = 0$ par habitude. L'origine du repère est au sol, pas au point de lâcher : $y(0) = h = 1{,}50$ m.

2.2 En déduire la durée de la chute du centre d'inertie G du marteau et vérifier la réponse à partir d'un des graphiques.

Données utiles $h = 1{,}50$ m ; $g_L = 1{,}6$ m · s^{-2} (1.2.5)

Le marteau touche le sol à la date t_C telle que $y(t_C) = 0$:

$-\dfrac{1}{2}\,g_L\,t_C^2 + h = 0$, soit $t_C^2 = \dfrac{2h}{g_L}$. On garde la solution positive :

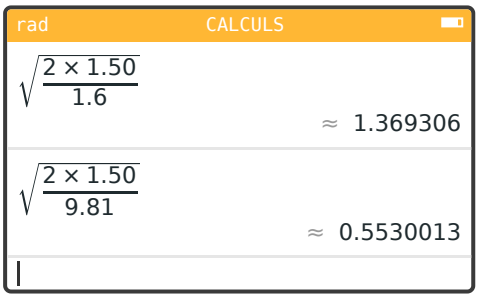
$$t_C = \sqrt{\frac{2h}{g_L}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}50}{1{,}6}} = 1{,}4\ \text{s}$$

Vérification : sur le graphique 2, la courbe $y(t)$ atteint $y = 0$ pour $t \approx 1{,}4$ s.

$t_C = 1{,}4$ s, valeur confirmée par le graphique 2.

COMPRENDRE
Sur Terre, la même chute de $1{,}50$ m durerait $\sqrt{2h/g} \approx 0{,}55$ s : la chute lunaire est environ 2,5 fois plus longue, ce qui la rend bien visible sur la vidéo.

À LA CALCULATRICE



2.3 Serait-on arrivé à la même réponse en raisonnant sur la plume ? Pourquoi ? Relever la phrase du texte qui confirme la réponse.

Oui. La plume a la même accélération $\vec{g}_L$ que le marteau (1.1.3) et les mêmes conditions initiales : lâchée au même instant, de la même hauteur, sans vitesse. Elle a donc la même équation horaire $y(t)$, où la masse n'intervient pas, et la même durée de chute.

Phrase du texte : « les deux objets s'enfoncèrent dans la poussière lunaire exactement au même instant ».

Même durée de chute, $t_C = 1{,}4$ s, pour la plume : en chute libre, le mouvement ne dépend pas de la masse.

3.1 À partir des équations horaires, établir la fonction $y(x)$ et démontrer que la trajectoire de G est une portion de parabole.

Données utiles $x(t) = (v\cos\alpha)\,t$; $y(t) = -\frac{1}{2}\,g_L\,t^2 + (v\sin\alpha)\,t$

On élimine le temps : $x = (v\cos\alpha)\,t$ donne $t = \dfrac{x}{v\cos\alpha}$.

On reporte dans $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2}\,g_L\left(\frac{x}{v\cos\alpha}\right)^2 + v\sin\alpha \times \frac{x}{v\cos\alpha}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{g_L}{2\,v^2\cos^2\alpha}\,x^2 + (\tan\alpha)\,x}$$

Cette équation est de la forme $y = a\,x^2 + b\,x$ avec $a < 0$: la trajectoire est une portion de parabole, tournée vers le bas.

MÉTHODE
Équation de trajectoire : isoler t dans l'équation la plus simple, celle de $x(t)$, puis le remplacer dans $y(t)$. Le temps ne doit plus apparaître dans le résultat.

3.2 Quelles sont les valeurs de y au début et à la fin du pas dans le repère choisi ?

Au début du pas, $t = 0$: $y(0) = 0$. L'origine O' du repère est donc la position de G au départ, ce que montre le graphique 4.

À la fin du pas, G « retombe à son niveau de départ » d'après le texte : y reprend la valeur 0.

$\boxed{y = 0 \text{ au début du pas et } y = 0 \text{ à la fin du pas.}}$

3.3 En déduire l'expression littérale de la distance horizontale parcourue par G, correspondant à la longueur d'un pas.

On note d la longueur du pas : c'est l'abscisse non nulle pour laquelle $y = 0$.

$$-\frac{g_L}{2\,v^2\cos^2\alpha}\,x^2 + (\tan\alpha)\,x = 0 \iff x\left(-\frac{g_L\,x}{2\,v^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha\right) = 0$$

Deux solutions : $x = 0$ (début du pas) ou $\dfrac{g_L\,x}{2\,v^2\cos^2\alpha} = \tan\alpha$ (fin du pas).

$$\boxed{d = \frac{2\,v^2\cos^2\alpha\,\tan\alpha}{g_L}}$$

PIÈGE
Diviser par x sans rien dire fait perdre la solution $x = 0$. Il faut factoriser, puis écarter cette solution en précisant qu'elle correspond au départ.

COMPRENDRE
Comme $\cos^2\alpha\,\tan\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$, on peut aussi écrire $d = \dfrac{2\,v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g_L}$: à vitesse égale, un pas est environ six fois plus long sur la Lune que sur Terre.

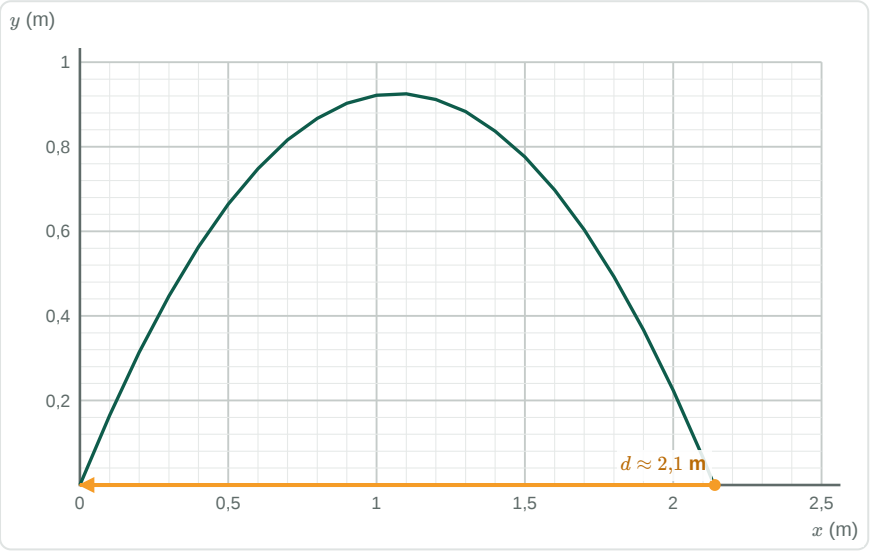
3.4 Faire le calcul numérique de la longueur du pas. Le résultat est-il compatible avec ce qui peut être déduit du graphique 4 ?

Données utiles $v = 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 60^\circ$; $g_L = 1{,}62\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$$d = \frac{2\,v^2\cos^2\alpha\,\tan\alpha}{g_L} = \frac{2\times 2{,}0^2\times\cos^2(60^\circ)\times\tan(60^\circ)}{1{,}62} = 2{,}1\ \text{m}$$

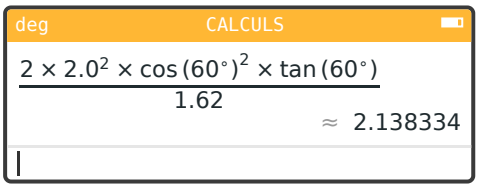
Sur le graphique 4, la courbe retrouve $y = 0$ pour x compris entre 2,1 m et 2,2 m.

$d = 2{,}1$ m, résultat compatible avec le graphique 4.



3.4 · Graphique 4 du sujet : G retrouve y = 0 un peu après x = 2,1 m

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Calculatrice restée en radians : on obtient alors une valeur sans rapport avec le graphique. Vérifier le mode degrés avant tout calcul avec 60°.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme v et α. Le calcul exact donne 2,14 m, ce qui correspond bien au point où la courbe coupe l'axe.