Pile au lithium et supercondensateur

Bac S 2011 Antilles-Guyane (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Après avoir donné les expressions littérales, déterminer l'intensité du courant nécessaire à la recharge si elle durait $\Delta t = 20$ s.

Données utiles $Q = 4{,}32\ \text{kC} = 4{,}32 \times 10^3\ \text{C}$; $\Delta t = 20\ \text{s}$

Pour un courant d'intensité constante I, la quantité d'électricité transportée pendant Δt est $Q = I\,\Delta t$, donc

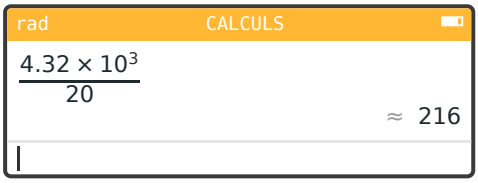
$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{4{,}32 \times 10^3}{20} = 216\ \text{A}$$

$I \approx 2{,}2 \times 10^2$ A

PIÈGE
Laisser Q en kilocoulombs : on trouverait 0,22 A, mille fois trop peu. Q en coulombs, Δt en secondes, I en ampères.

COMPRENDRE
Le résultat garde deux chiffres significatifs, comme la donnée la moins précise ($\Delta t = 20$ s). On conserve 216 A pour d'éventuels calculs intermédiaires.

À LA CALCULATRICE



1.1.2 Les intensités usuellement utilisées au laboratoire permettraient-elles une recharge aussi courte ?

Données utiles $I \approx 2{,}2 \times 10^2$ A (1.1.1)

Au laboratoire, les intensités vont de quelques milliampères à quelques ampères au plus. La valeur trouvée est au moins cent fois plus grande.

Non : les intensités du laboratoire ne permettent pas une recharge en 20 s.

COMPRENDRE
À intensité cent fois plus faible, la durée est cent fois plus longue : avec 2 A il faudrait 2 160 s, soit 36 min.

1.2.1 L'ion lithium du couple $\text{Li}^+(\text{aq})/\text{Li}(\text{aq})$ constitue la borne positive. Écrire l'équation de la réaction à cette électrode et nommer l'électrode.

Lors de la décharge, les électrons arrivent par le circuit extérieur à la borne positive : ils y sont consommés par l'oxydant du couple.

$$\text{Li}^+(\text{aq}) + \text{e}^- = \text{Li}(\text{aq})$$

C'est un gain d'électrons, donc une réduction.

$\text{Li}^+(\text{aq}) + \text{e}^- = \text{Li}(\text{aq})$: l'électrode positive, siège d'une réduction, est la **cathode**.

PIÈGE
Écrire l'oxydation $\text{Li} = \text{Li}^+ + \text{e}^-$: l'énoncé dit que c'est l'ion Li^+, donc l'oxydant, qui réagit à la borne positive.

MÉTHODE
Dans une pile, les électrons vont de la borne $-$ à la borne $+$ par l'extérieur. Borne $+$: réduction, cathode. Borne $-$: oxydation, anode.

1.2.2 La transformation dans la pile est-elle spontanée ou forcée ? Pendant le fonctionnement, le quotient de réaction est-il supérieur ou inférieur à la constante d'équilibre ?

En décharge, l'accumulateur fonctionne en générateur, comme une pile : il fournit de l'énergie électrique sans apport extérieur. La transformation est donc spontanée.

Un système évolue spontanément dans le sens direct tant que $Q_r < K$: Q_r augmente et se rapproche de K.

Transformation **spontanée** ; pendant le fonctionnement $Q_r < K$.

COMPRENDRE
Quand $Q_r = K$, l'équilibre est atteint : plus de courant, la pile est usée. La recharge, elle, est une transformation forcée, imposée par un générateur extérieur.

1.2.3 Pour une décharge totale de l'accumulateur, calculer la quantité d'ions Li^+ consommée.

Données utiles $Q = 4{,}32 \times 10^3$ C ; $1\ F = 96\,500$ C (charge d'une mole d'électrons)

La quantité d'électricité débitée est portée par les électrons échangés : $Q = n(\mathrm{e}^-)\,F$.

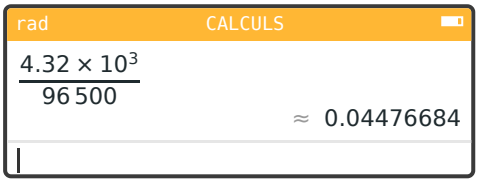
D'après la demi-équation $\mathrm{Li}^+ + \mathrm{e}^- = \mathrm{Li}$, un ion lithium est consommé par électron reçu : $n(\mathrm{Li}^+) = n(\mathrm{e}^-)$.

$$n(\mathrm{Li}^+) = \frac{Q}{F} = \frac{4{,}32 \times 10^3}{96\,500}$$

$\boxed{n(\mathrm{Li}^+) = 4{,}48 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol}}$

COMPRENDRE
La masse molaire M_{Li} donnée ne sert pas ici : la question demande une quantité de matière, pas une masse. Une donnée peut être inutile.

À LA CALCULATRICE



2.1 Rappeler l'expression de la constante de temps τ d'un circuit RC et montrer, par analyse dimensionnelle, que τ est homogène à un temps.

$\tau = RC$

Loi d'Ohm $u = Ri$: $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$.

Pour un condensateur, $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$: $[I] = [C]\dfrac{[U]}{[T]}$, donc $[C] = \dfrac{[I]\,[T]}{[U]}$.

$$[RC] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]\,[T]}{[U]} = [T]$$

$\boxed{\tau = RC \text{ a la dimension d'un temps : } [\tau] = [T].}$

MÉTHODE
Pour chaque grandeur, partir d'une relation connue qui la relie à des tensions, des intensités et des durées, puis simplifier le produit. On peut aussi utiliser $q = C\,u$ et $q = i\,t$.

2.2 Le condensateur est totalement chargé après $\Delta t = 5\,\tau$. En déduire τ puis la capacité C. Cette valeur est-elle fréquente au laboratoire ?

Données utiles $\Delta t = 6$ min ; $R = 1{,}0\ \Omega$

$\Delta t = 6 \times 60 = 360$ s

$$\tau = \frac{\Delta t}{5} = \frac{360}{5} = 72\ \mathrm{s}$$

$$\tau = RC \quad \text{donc} \quad C = \frac{\tau}{R} = \frac{72}{1{,}0} = 72\ \mathrm{F}$$

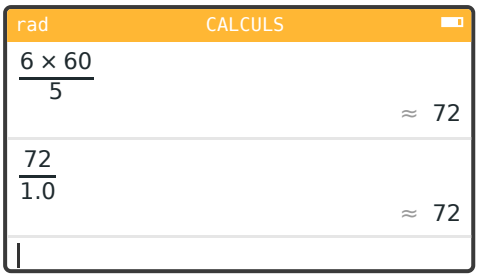
Au laboratoire, les capacités vont du nanofarad au millifarad : 72 F est au moins dix mille fois plus grand.

$\boxed{\tau = 72\ \mathrm{s} \text{ et } C = 72\ \mathrm{F} \text{ : une capacité jamais rencontrée au laboratoire.}}$

PIÈGE
Laisser Δt en minutes : $\tau = 1{,}2$ donnerait $C = 1{,}2$ F, valeur fausse. La seconde est l'unité qui s'accorde avec l'ohm et le farad.

COMPRENDRE
La durée « 6 min » n'a qu'un chiffre significatif : en toute rigueur $\tau \approx 7 \times 10^1$ s et $C \approx 7 \times 10^1$ F. L'ordre de grandeur, plusieurs dizaines de farads, justifie le nom de supercondensateur.

À LA CALCULATRICE



2.3 Rappeler la relation qui lie l'intensité $i(t)$ à la dérivée de la charge $q(t)$ par rapport au temps.

Avec l'orientation du schéma, le courant i arrive sur l'armature qui porte la charge q (convention récepteur) :

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

COMPRENDRE
L'intensité est un débit de charge. Si la flèche de i arrive sur l'armature de charge q, un courant positif fait augmenter q ; avec l'orientation inverse, on aurait $i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

2.4 En appliquant la loi des tensions au circuit, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$.

Interrupteur en position 2 : la maille ne contient que le conducteur ohmique et le condensateur, reliés par un fil.

Loi des mailles : $u_R + u_C = 0$.

Loi d'Ohm (convention récepteur) : $u_R = R\,i$.

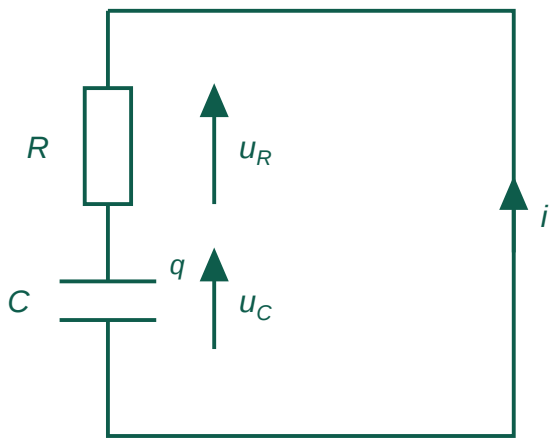
Condensateur : $q = C\,u_C$, donc $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ car C est constante.

En remplaçant : $R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R\,C}\,u_C = 0$$

PIÈGE
Écrire $u_R + u_C = E$: c'est l'équation de la charge. En position 2, le générateur n'est plus dans la maille.

MÉTHODE
Toujours trois étapes : loi des mailles, loi d'Ohm, relation $i = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. On élimine i et u_R pour ne garder que u_C.



2.4 · Circuit de décharge (interrupteur en position 2), orienté comme dans le sujet

2.5.1 La solution est de la forme $u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\beta}$. Déterminer l'expression de β.

$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A}{\beta}\,\mathrm{e}^{-t/\beta}$. En reportant dans l'équation différentielle :

$$-\frac{RC}{\beta}\,A\,\mathrm{e}^{-t/\beta} + A\,\mathrm{e}^{-t/\beta} = 0 \quad \text{soit} \quad A\,\mathrm{e}^{-t/\beta}\left(1 - \frac{RC}{\beta}\right) = 0$$

Cette égalité doit être vraie à chaque instant, et $A\,\mathrm{e}^{-t/\beta} \neq 0$: il faut $1 - \dfrac{RC}{\beta} = 0$.

$$\boxed{\beta = RC}$$

COMPRENDRE
β n'est autre que la constante de temps τ de la question 2.1 : elle fixe la rapidité de la décharge.

2.5.2 Déterminer l'expression de A.

Données utiles à $t = 0$, le condensateur est chargé sous la tension E

Condition initiale : $u_C(0) = E$.

Or $u_C(0) = A\,\mathrm{e}^0 = A$.

$$\boxed{A = E}$$

MÉTHODE
La constante placée devant l'exponentielle se trouve toujours avec la condition initiale ; celle de l'exposant, en reportant la solution dans l'équation différentielle.

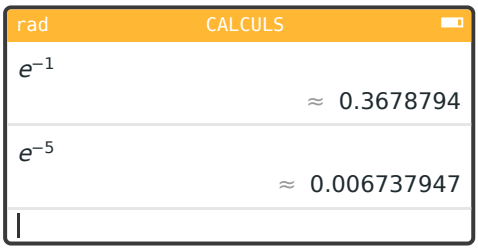
2.5.3 Donner l'expression finale de $u_C(t)$.

Données utiles $\beta = RC$ (2.5.1) ; $A = E$ (2.5.2)

$$\boxed{u_C(t) = E\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}}$$

COMPRENDRE
La tension part de $E = 2{,}5$ V et décroît vers zéro : il reste $37\,\%$ de E à $t = \tau$ et moins de $1\,\%$ à $t = 5\,\tau$.

À LA CALCULATRICE



2.6 Donner l'expression littérale de $i(t)$ en fonction de E, R et C. Quel est le sens réel du courant pendant la décharge ?

Données utiles $u_C(t) = E\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}$ (2.5.3)

$$i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = C \times \left(-\frac{E}{RC}\right)\mathrm{e}^{-t/(RC)} = -\frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}$$

E et R sont positifs et l'exponentielle aussi : $i(t) < 0$ à chaque instant.

$\boxed{i(t) = -\dfrac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}}$: le courant réel circule dans le sens **opposé** à la flèche du schéma.

PIÈGE
Oublier le signe moins en dérivant l'exponentielle : on conclurait à tort que le courant suit le sens de la flèche.

COMPRENDRE
Le condensateur joue le rôle de générateur : le courant sort de son armature positive et traverse le conducteur ohmique. Sa charge q diminue, ce qui impose bien $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} < 0$.

MÉTHODE
Vérification rapide par la loi des mailles : $i = \dfrac{u_R}{R} = -\dfrac{u_C}{R}$, ce qui redonne la même expression sans dériver.