Station spatiale internationale

Bac S 2013 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 2 **6,5 points** **Durée conseillée 1 h**

1 Représenter sur un schéma la Terre, la station S, un vecteur unitaire $\vec{u}$ orienté de S vers la Terre T et la force gravitationnelle exercée par la Terre sur la station. Donner l'expression vectorielle de cette force en fonction de $\vec{u}$.

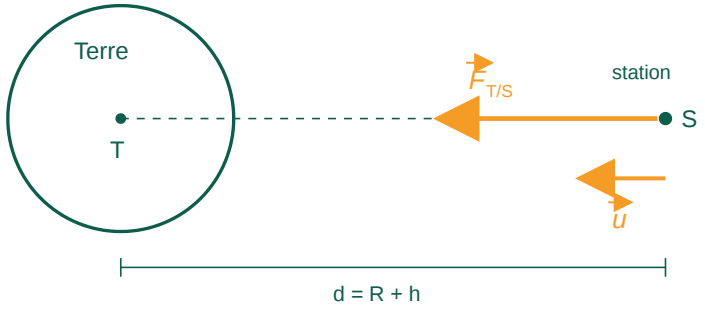
Schéma ci-dessous : la force $\vec{F}_{T/S}$ est appliquée en S, portée par la droite (ST) et dirigée vers T, comme $\vec{u}$.

La distance entre T et S est $d = R + h$, donc :

$$\vec{F}_{T/S} = G\,\frac{m\,M}{(R+h)^2}\,\vec{u}$$

PIÈGE

Tracer la force à partir du centre de la Terre : elle s'exerce sur la station, son point d'application est S. Avec $\vec{u}$ orienté de S vers T, il n'y a pas de signe « $-$ ».



1 · La Terre, la station S, le vecteur unitaire et la force gravitationnelle

2 En considérant la seule action de la Terre, établir l'expression vectorielle de l'accélération $\vec{a}_S$ de la station dans le référentiel géocentrique, en fonction de G, M, h, R et $\vec{u}$.

Système : {station S}, de masse m constante. Référentiel géocentrique supposé galiléen. Seule force : $\vec{F}_{T/S}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F}_{T/S} = m\,\vec{a}_S$, soit $G\,\dfrac{m\,M}{(R+h)^2}\,\vec{u} = m\,\vec{a}_S$.

En simplifiant par m :

$$\vec{a}_S = \frac{G\,M}{(R+h)^2}\,\vec{u}$$

COMPRENDRE

L'accélération ne dépend pas de la masse m de la station. Elle est dirigée vers le centre de la Terre : on dit qu'elle est centripète.

MÉTHODE

Toujours annoncer le système, le référentiel et le bilan des forces avant d'écrire la deuxième loi de Newton : ces trois lignes sont notées.

3.1 Montrer que, pour un mouvement circulaire, la valeur de la vitesse de la station a pour expression $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$.

Pour un mouvement circulaire de rayon $R+h$, l'accélération s'écrit dans le repère de Frenet $(S\,;\vec{n},\vec{\tau})$, avec $\vec{n}=\vec{u}$ dirigé vers le centre T :

$$\vec{a}_S = \frac{v^2}{R+h}\vec{u} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

Or, d'après la question 2, $\vec{a}_S = \dfrac{G\,M}{(R+h)^2}\vec{u}$. Par identification :

- selon $\vec{\tau}$: $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, la valeur de la vitesse est constante, le mouvement est uniforme ;
- selon $\vec{u}$: $\dfrac{v^2}{R+h} = \dfrac{G\,M}{(R+h)^2}$, soit $v^2 = \dfrac{G\,M}{R+h}$.

$v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{R+h}}$, qui est bien l'expression attendue.

PIÈGE
Le rayon de la trajectoire est $R+h$, pas h : la station tourne autour du centre de la Terre, pas autour d'un point de sa surface.

MÉTHODE
Orbite circulaire : deuxième loi de Newton, puis accélération dans le repère de Frenet, puis identification. La composante tangentielle donne l'uniformité, la composante normale donne la vitesse.

3.2 Calculer la valeur de la vitesse de la station en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Données utiles $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$; $M = 5{,}98\times10^{24}$ kg ; $R = 6380$ km ; $h = 400$ km

$R+h = 6380+400 = 6780\ \mathrm{km} = 6{,}78\times10^{6}\ \mathrm{m}$

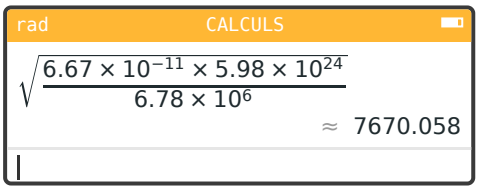
$$v = \sqrt{\frac{G\,M}{R+h}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{6{,}78\times10^{6}}}$$

$v = 7{,}67\times10^{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

PIÈGE
Laisser $R+h$ en kilomètres : G est donnée en unités SI, la distance doit être en mètres. Sinon le résultat est faux d'un facteur $\sqrt{1000}\approx 32$.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme G et M, les données les moins précises. Cela représente environ $7{,}7\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$, soit près de $28\,000\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

À LA CALCULATRICE



4 Combien de révolutions autour de la Terre un astronaute présent à bord de la station fait-il en 24 h ?

Données utiles $v = 7{,}67\times10^{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (3.2) ; $R+h = 6{,}78\times10^{6}$ m

Le mouvement est circulaire uniforme : pendant une période T, la station parcourt le périmètre $2\pi(R+h)$ à la vitesse v.

$$T = \frac{2\pi\,(R+h)}{v} = \frac{2\pi\times6{,}78\times10^{6}}{7{,}67\times10^{3}} = 5{,}55\times10^{3}\ \mathrm{s}$$

soit environ 1 h 33 min.

En $\Delta t = 24\ \mathrm{h} = 86\,400$ s, le nombre de révolutions est :

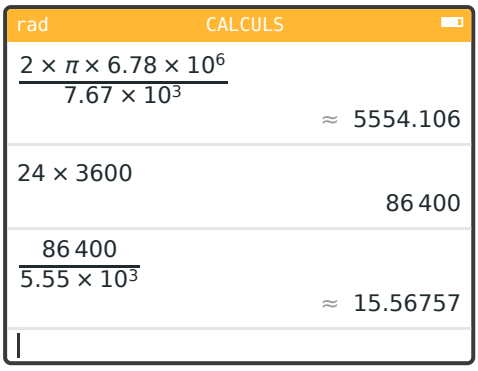
$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{86\,400}{5{,}55\times10^{3}} = 15{,}6$$

$N \approx 15{,}6$: l'astronaute fait un peu plus de 15 tours de la Terre en 24 h.

PIÈGE
Diviser 24 h par une période en secondes. Les deux durées doivent avoir la même unité : tout en secondes, ou tout en heures.

COMPRENDRE
L'astronaute a le même mouvement que la station. Ce nombre de tours est compté dans le référentiel géocentrique : la rotation de la Terre sur elle-même n'intervient pas.

À LA CALCULATRICE



1.1 Le système {fusée + gaz} étant supposé isolé, comparer sa quantité de mouvement à $t = 0$ s et à $t = 1$ s pour montrer que $\vec{v}_f = -\dfrac{m_g}{m_f}\,\vec{v}_g$. Quelle est la conséquence de l'éjection des gaz sur le mouvement de la fusée ?

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le système {fusée + gaz} est isolé : sa quantité de mouvement $\vec{p}$ se conserve.

- À $t = 0$ s, le système est immobile : $\vec{p}(0) = \vec{0}$.
- À $t = 1$ s : $\vec{p}(1) = m_f\,\vec{v}_f + m_g\,\vec{v}_g$.

Conservation : $\vec{p}(1) = \vec{p}(0)$, soit $m_f\,\vec{v}_f + m_g\,\vec{v}_g = \vec{0}$.

$\vec{v}_f = -\dfrac{m_g}{m_f}\,\vec{v}_g$, qui est bien la relation attendue.

Le signe « $-$ » montre que $\vec{v}_f$ est de sens opposé à $\vec{v}_g$: les gaz sont éjectés vers le bas, la fusée est mise en mouvement vers le haut. C'est la propulsion par réaction.

PIÈGE
Oublier la seconde partie de la question. La relation démontrée ne suffit pas : il faut dire en une phrase que la fusée part dans le sens opposé à celui des gaz.

COMPRENDRE
La quantité de mouvement $\vec{p} = m\,\vec{v}$ et sa conservation pour un système isolé relevaient du programme de Terminale S. Elles ne figurent plus au programme actuel de spécialité.

1.2 Montrer numériquement que la variation de la masse de la fusée est négligeable une seconde après le décollage, puis calculer la valeur de la vitesse de la fusée à cet instant.

Données utiles $D = 2{,}9 \times 10^3$ kg · s^{-1} ; masse au décollage $m_0 = 7{,}8 \times 10^2$ t $= 7{,}8 \times 10^5$ kg ; $v_g = 4{,}0$ km · s^{-1} $= 4{,}0 \times 10^3$ m · s^{-1}

Masse de gaz éjectée en $\Delta t = 1$ s : $m_g = D\,\Delta t = 2{,}9 \times 10^3 \times 1 = 2{,}9 \times 10^3$ kg.

$$\frac{m_g}{m_0} = \frac{2{,}9 \times 10^3}{7{,}8 \times 10^5} = 3{,}7 \times 10^{-3}$$

La fusée a perdu moins de 0,4 % de sa masse : cette variation est négligeable, donc $m_f \approx m_0 = 7{,}8 \times 10^5$ kg.

En valeur, la relation de la question 1.1 donne :

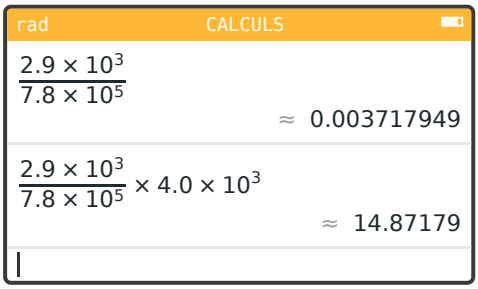
$$v_f = \frac{m_g}{m_f}\,v_g = \frac{2{,}9 \times 10^3}{7{,}8 \times 10^5} \times 4{,}0 \times 10^3$$

$v_f = 15$ m · s^{-1}

PIÈGE
Mélanger tonnes et kilogrammes dans le rapport des masses : $7{,}8 \times 10^2$ t valent $7{,}8 \times 10^5$ kg. Convertir aussi v_g en m · s^{-1}.

COMPRENDRE
« Négligeable » se justifie par un rapport, pas par une simple différence : on compare la masse perdue à la masse totale. Le résultat garde deux chiffres significatifs, comme les données.

À LA CALCULATRICE



2.1 En réalité la vitesse v_f est très inférieure à celle calculée à la question 1.2. En supposant le système {fusée + gaz} isolé, quelle force n'aurait-on pas dû négliger ?

Un système isolé n'est soumis à aucune force extérieure. Or le système {fusée + gaz} subit l'attraction de la Terre.

La force qu'il ne fallait pas négliger est le **poids** du système, vertical et dirigé vers le bas, qui s'oppose au décollage.

Les frottements de l'air interviennent aussi, mais beaucoup moins à cette faible vitesse.

COMPRENDRE
Avec une force extérieure non compensée, la quantité de mouvement du système ne se conserve plus : le raisonnement de la question 1.1 surestime donc la vitesse.

2.2.1 Montrer que le produit $D \cdot v_g$ est homogène à une force.

D s'exprime en $\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$ et v_g en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, donc $D\,v_g$ s'exprime en $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$.

D'après la deuxième loi de Newton, $F = m\,a$: une force est le produit d'une masse (kg) par une accélération ($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$), donc $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$.

$D\,v_g$ s'exprime en $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$, c'est-à-dire en newtons : ce produit est homogène à une force.

MÉTHODE
Pour une question d'homogénéité : écrire l'unité de chaque grandeur, former l'unité du produit, puis la comparer à celle obtenue par une relation connue ($F = m\,a$ ou $P = m\,g$).

2.2.2 Vérifier par une application numérique que la fusée peut effectivement décoller.

Données utiles $m_f = 7{,}8 \times 10^5$ kg ; $g = 9{,}78\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$; $D = 2{,}9 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$; $v_g = 4{,}0 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

La fusée décolle si la poussée, verticale vers le haut, a une valeur supérieure à celle du poids, vertical vers le bas.

Poids : $P = m_f\,g = 7{,}8 \times 10^5 \times 9{,}78 = 7{,}6 \times 10^6$ N

Poussée : $F = D\,v_g = 2{,}9 \times 10^3 \times 4{,}0 \times 10^3 = 1{,}2 \times 10^7$ N

$F = 1{,}2 \times 10^7\ \mathrm{N} > P = 7{,}6 \times 10^6\ \mathrm{N}$: la fusée peut décoller.

PIÈGE
Calculer le poids avec la masse en tonnes, ou la poussée avec v_g en $\mathrm{km \cdot s^{-1}}$: la comparaison n'a alors aucun sens.

COMPRENDRE
La poussée vaut environ 1,5 fois le poids. La résultante, dirigée vers le haut, vaut $F - P \approx 4 \times 10^6$ N : l'accélération au décollage est d'environ $5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

À LA CALCULATRICE

