Une lampe "secouée"

Bac S 2012 Liban (ancien programme) · Exercice 3 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pendant la décharge et montrer qu'elle s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u_C = 0$ avec $\tau = RC$.

Loi d'additivité des tensions dans la maille : $u_C + u_R = 0$.

Loi d'Ohm (convention récepteur) : $u_R = R\,i$.

Avec l'orientation du schéma, i arrive sur l'armature portant la charge $q = C\,u_C$: $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (C constante).

D'où $u_C + RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$, puis en divisant par RC :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,u_C = 0 \text{ avec } \tau = RC$$

PIÈGE

Le signe de $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ dépend de l'orientation choisie sur le schéma. Ici i est négatif pendant la décharge : le courant réel circule en sens inverse de la flèche.

1.2 Vérifier par une analyse dimensionnelle que τ est homogène à un temps.

Loi d'Ohm : $u = R\,i$ donc $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$.

$q = C\,u$ et $q = i\,\Delta t$ donc $[C] = \dfrac{[I]\,[T]}{[U]}$.

$$[\tau] = [R]\,[C] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]\,[T]}{[U]}$$

$[\tau] = [T]$: $\tau = RC$ est homogène à un temps.

MÉTHODE

Pour une analyse dimensionnelle, partir de relations simples connues ($u = Ri$, $q = Cu$, $q = i\,\Delta t$) et exprimer chaque grandeur en fonction de $[U]$, $[I]$ et $[T]$.

1.3 Montrer que $u_C(t) = U_0\,e^{-t/\tau}$ est solution de l'équation différentielle précédente.

U_0 et τ sont constants : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{U_0}{\tau}\,e^{-t/\tau}$.

On remplace dans l'équation :

$$-\frac{U_0}{\tau}\,e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau}\,U_0\,e^{-t/\tau} = 0$$

L'égalité est vérifiée pour tout t. De plus $u_C(0) = U_0$, ce qui correspond à la condition initiale.

$u_C(t) = U_0\,e^{-t/\tau}$ est solution.

PIÈGE

Oublier le facteur $-\dfrac{1}{\tau}$ en dérivant : $\left(e^{-t/\tau}\right)' = -\dfrac{1}{\tau}\,e^{-t/\tau}$.

1.4 En déduire qu'une durée d'environ 5τ permet une décharge quasi complète du condensateur.

Données utiles $U_0 = 3{,}6$ V

$u_C(5\tau) = U_0\,e^{-5\tau/\tau} = U_0\,e^{-5}$

$u_C(5\tau) = 6{,}7 \times 10^{-3}\,U_0 = 6{,}7 \times 10^{-3} \times 3{,}6 = 2{,}4 \times 10^{-2}$ V

La tension ne vaut plus que 0,7 % environ de sa valeur initiale.

À $t = 5\tau$, $u_C \approx 0{,}7\,\%$ de U_0 : la décharge est quasi complète.

COMPRENDRE

Mathématiquement u_C n'atteint jamais 0 ; on convient qu'au-delà de 5τ (moins de 1 % de U_0) le régime transitoire est terminé.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

e^{-5}

$\approx$ 0.006737947

$3.6 \times e^{-5}$

$\approx$ 0.02425661

1.5 La durée de décharge vaut vingt minutes : déterminer la résistance R à associer au condensateur de capacité $C = 1{,}0$ F.

Données utiles $5\tau = 20$ min ; $C = 1{,}0$ F

$5\tau = 20 \text{ min} = 1200 \text{ s}$, donc $\tau = 240$ s.

$\tau = RC$ donc $R = \dfrac{\tau}{C} = \dfrac{20 \times 60}{5 \times 1{,}0}$

$R = 2{,}4 \times 10^2\ \Omega$

PIÈGE
Convertir les minutes en secondes avant le calcul, et ne pas oublier de diviser par 5 : $RC = \tau$, pas 5τ.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme $C = 1{,}0$ F : on écrit $2{,}4 \times 10^2\ \Omega$ plutôt que 240 Ω.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{20 \times 60}{5 \times 1.0}$

$\approx$ 240

2.1 Choisir la proposition qui décrit le mieux la conversion d'énergie lors du « secouement » de la lampe.

On agite la lampe (mouvement : énergie mécanique) et elle produit de l'électricité stockée dans le condensateur.

Proposition c) : conversion d'énergie mécanique en énergie électrique.

COMPRENDRE
Aucune réaction chimique n'intervient : il n'y a pas de pile, ce qui élimine b) et d).

2.2 Rappeler l'expression de l'énergie $E(t)$ emmagasinée dans le condensateur en fonction de $u_C(t)$ et C.

$E(t) = \dfrac{1}{2} C\, u_C(t)^2$

2.3 Calculer l'énergie E_{max} emmagasinée à la fin de la charge, puis vérifier qu'elle ne dépasse pas les performances annoncées par le constructeur.

Données utiles $C = 1{,}0$ F ; $U_0 = 3{,}6$ V ; énergie maximale annoncée : 12 J

$E_{max} = \dfrac{1}{2} C\, U_0^2 = \dfrac{1}{2} \times 1{,}0 \times 3{,}6^2 = 6{,}5$ J

$6{,}5 \text{ J} < 12 \text{ J}$: les performances du constructeur sont respectées.

$E_{max} = 6{,}5$ J, inférieure aux 12 J annoncés.

PIÈGE
Oublier le carré sur U_0 ou le facteur $\frac{1}{2}$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$0.5 \times 1.0 \times 3.6^2$

$\approx$ 6.48

2.4 Vérifier par un calcul que la lampe ne pourra pas fonctionner sans être « secouée » après plusieurs semaines sans utilisation.

Données utiles $E_{max} = 6{,}48$ J (Q2.3) ; perte : 8 mJ par heure

Durée au bout de laquelle toute l'énergie est perdue :

$$\Delta t = \frac{E_{max}}{8 \times 10^{-3}} = \frac{6{,}48}{8 \times 10^{-3}} = 8{,}1 \times 10^2 \text{ h}$$

Soit $\frac{810}{24} \approx 34$ jours, environ 5 semaines.

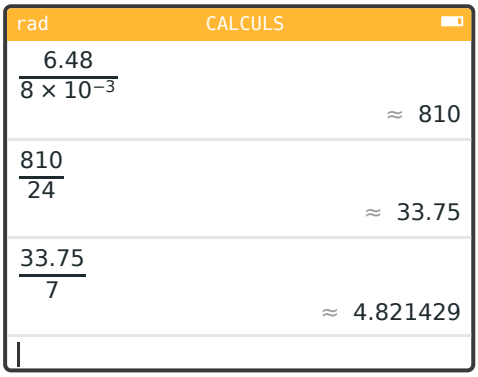
Au bout de 5 semaines environ, le condensateur est déchargé : la lampe doit être secouée de nouveau.

$\Delta t = 8{,}1 \times 10^2$ h ≈ 5 semaines

COMPRENDRE

La DEL s'éteint dès que u_C descend à 3,0 V (partie 3), soit $E = 4{,}5$ J. L'énergie utile (≈ 2 J) est donc perdue en une dizaine de jours seulement : la conclusion est renforcée.

À LA CALCULATRICE



3.1 Sur la figure 1 de l'annexe 2, ajouter en série avec R une DEL qui laisse passer le courant lors de la décharge.

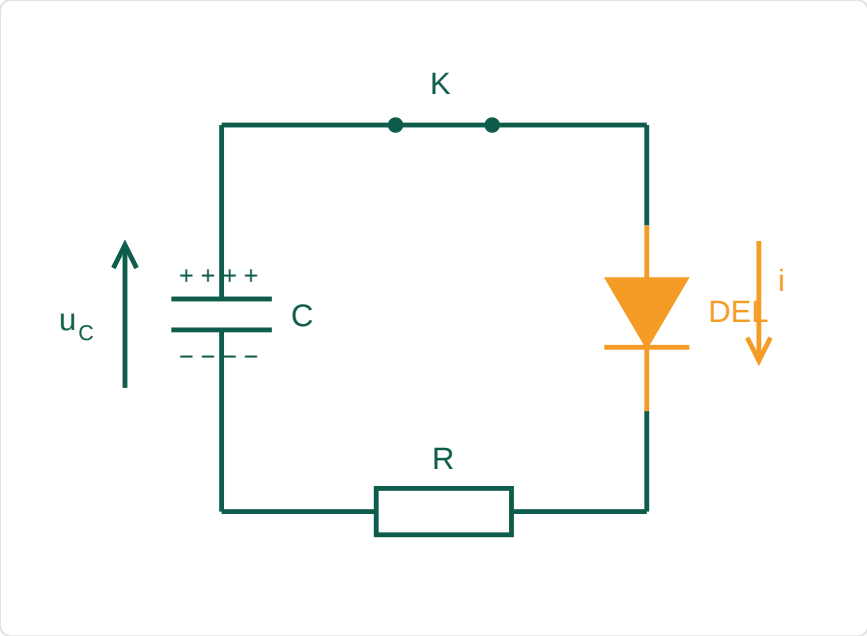
Pendant la décharge, le courant réel sort de l'armature positive (en haut), passe par K puis descend dans la branche de droite.

La DEL est placée dans la branche de droite, sens passant vers le bas : triangle pointant vers le bas, barre du côté de R.

DEL en série, sens passant de l'armature positive vers R (voir le schéma).

PIÈGE

Le sens passant se lit de la pointe du triangle vers la barre. Une DEL montée à l'envers bloque le courant : aucune décharge.



3.1 · Annexe 2, figure 1 complétée : la DEL (en orange) dans la branche de droite

3.2 Pourquoi le condensateur ne peut-il pas se décharger complètement ?

Données utiles $U_{seuil} = 3{,}0$ V

La DEL ne conduit que si la tension à ses bornes atteint $U_{seuil} = 3{,}0$ V. Au cours de la décharge, u_C diminue ; quand u_C descend à 3,0 V, la tension disponible pour la diode devient inférieure au seuil : le courant s'annule.

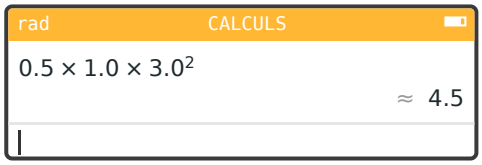
Le condensateur cesse de se décharger alors qu'il reste une tension d'environ 3,0 V à ses bornes.

Le courant s'arrête dès que $u_C \leq U_{seuil} = 3{,}0$ V : la décharge s'interrompt avant $u_C = 0$.

COMPRENDRE

L'énergie restante, $\frac{1}{2} C U_{seuil}^2 = 4{,}5$ J, ne peut plus allumer la DEL : c'est l'essentiel des 6,5 J stockés.

À LA CALCULATRICE



3.3 La présence de la DEL modifie-t-elle la durée nécessaire pour que u_C passe de 3,6 V à 3,0 V ? Justifier.

Oui. La DEL, de résistance r, est en série avec R : la résistance totale du circuit devient $R + r$, et une partie de la tension u_C est prise par le seuil de la diode.

La constante de temps devient $\tau' = (R + r)\, C > \tau = RC$: le courant est plus faible et la décharge plus lente.

Oui : la durée de passage entre 3,6 V et 3,0 V est plus longue, car $\tau' = (R + r)\, C > RC$.

COMPRENDRE

Avec le seuil, la loi des mailles donne $u_C = U_{seuil} + (R + r)\, i$: u_C tend vers 3,0 V sans l'atteindre, ce qui allonge encore cette durée.

3.4 Choisir la ou les solutions permettant la décharge complète du condensateur, avec un argument : inverser la diode, augmenter R, court-circuiter le condensateur, court-circuiter la diode.

Court-circuiter le condensateur : un fil relie directement ses deux armatures, la décharge se fait à travers ce fil sans passer par la diode, jusqu'à $u_C = 0$.

Court-circuiter la diode : on retrouve le circuit RC de la partie 1, sans tension de seuil, et u_C tend vers 0.

Les deux autres solutions ne conviennent pas : une diode inversée bloque tout courant, et augmenter R ralentit la décharge sans supprimer le seuil de 3,0 V.

Solutions retenues : court-circuiter le condensateur ou court-circuiter la diode.

MÉTHODE

Pour un choix parmi des propositions, justifier aussi brièvement le rejet des autres : c'est souvent là que se joue la totalité des points.