Le ludion

Bac S 2012 Liban (ancien programme) · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le ludion en équilibre.

Système {ludion}, dans le référentiel du laboratoire. Il subit :

- son poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ exercée par l'eau, verticale, vers le haut.

Deux forces : le poids $\vec{P}$ et la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$.

PIÈGE
Ajouter une force de frottement : à l'équilibre le ludion est immobile, l'eau n'exerce aucun frottement.

1.1.2 Exprimer la valeur des différentes forces en fonction de m_L, ρ_{eau}, V_L et g.

Poids : $P = m_L\, g$.

Poussée d'Archimède : elle est égale au poids du volume d'eau déplacé, ici V_L (ludion totalement immergé) : $\Pi = \rho_{eau}\, V_L\, g$.

$P = m_L\, g$ et $\Pi = \rho_{eau}\, V_L\, g$

COMPRENDRE
Dans Π, la masse volumique est celle du fluide déplacé (l'eau), pas celle du ludion.

1.1.3 Établir l'expression littérale du volume d'air V_{A1} à l'équilibre en fonction de m_L, ρ_{eau} et V_B.

Le ludion est immobile : d'après le principe d'inertie, $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$, donc $P = \Pi$.

$$m_L\, g = \rho_{eau}\,(V_B + V_{A1})\, g \quad \Rightarrow \quad V_B + V_{A1} = \frac{m_L}{\rho_{eau}}$$

$$V_{A1} = \frac{m_L}{\rho_{eau}} - V_B$$

MÉTHODE
Pour un équilibre : système, référentiel, principe d'inertie (somme vectorielle nulle), puis égalité des normes des deux forces opposées.

1.1.4 Calculer la valeur du volume d'air V_{A1}.

Données utiles $m_L = 6{,}8$ g ; $V_B = 1{,}8$ cm^3 ; $\rho_{eau} = 1000$ kg · m^{-3}

En unités SI : $m_L = 6{,}8 \times 10^{-3}$ kg et $V_B = 1{,}8 \times 10^{-6}$ m^3.

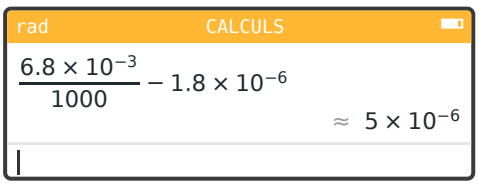
$$V_{A1} = \frac{6{,}8 \times 10^{-3}}{1000} - 1{,}8 \times 10^{-6} = 5{,}0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$V_{A1} = 5{,}0 \times 10^{-6}$ m^3 $= 5{,}0$ cm^3

PIÈGE
Garder m_L en grammes avec ρ_{eau} en kg · m^{-3} : le résultat est faux d'un facteur 1000.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme m_L et V_B. Plus rapide : $\rho_{eau} = 1{,}0$ g · cm^{-3}, donc $V_L = 6{,}8$ cm^3.

À LA CALCULATRICE



1.2.1 L'air étant un gaz parfait, indiquer l'évolution du volume d'air du ludion après compression de la membrane.

Pour l'air du ballon : $P\,V_A = n\,R\,T$. Le ballon est fermé (n constant) et $T = 298$ K est constante, donc $P\,V_A = n\,R\,T$ = constante.

La compression augmente la pression P de l'air enfermé.

P augmente et $P\,V_A$ reste constant : le volume d'air V_A **diminue**.

COMPRENDRE
Produit constant : si la pression double, le volume est divisé par deux (loi de Boyle-Mariotte).

1.2.2 Justifier que le ludion entame alors un mouvement vertical vers le bas.

V_B est constant et V_A diminue, donc $V_L = V_B + V_A$ diminue. La poussée $\Pi = \rho_{eau}\, V_L\, g$ diminue, alors que le poids $P = m_L\, g$ ne change pas (la masse d'air est la même).

On a donc $\Pi < P$: la somme des forces est verticale, vers le bas, et le ludion, initialement immobile, part vers le bas.

Π devient inférieure à P : la résultante est dirigée vers le bas, le ludion descend.

PIÈGE
Dire que le ludion « devient plus lourd » : sa masse ne varie pas, c'est la poussée d'Archimède qui diminue.

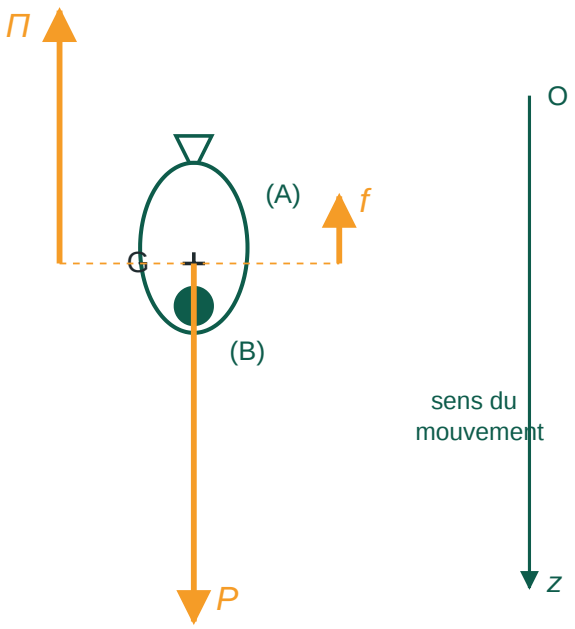
2.1 Représenter sur un schéma cohérent, sans souci d'échelle, les forces qui s'exercent sur le ludion en mouvement.

Le ludion descend : il subit son poids $\vec{P}$ (vers le bas), la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ (vers le haut) et la force de frottement $\vec{f} = -k\,\vec{v}$, opposée à la vitesse, donc vers le haut.

Pendant la phase accélérée, $P > \Pi + f$: la flèche de $\vec{P}$ est la plus longue.

Schéma : $\vec{P}$ vers le bas, $\vec{\Pi}$ et $\vec{f}$ vers le haut, avec $P > \Pi + f$.

PIÈGE
Orienter $\vec{f}$ vers le bas, ou dessiner trois flèches de même longueur : le schéma ne serait plus cohérent avec un mouvement accéléré vers le bas.



2.1 · Forces sur le ludion pendant la descente (sans échelle)

2.2 En appliquant la deuxième loi de Newton dans le référentiel du laboratoire, établir l'équation différentielle du mouvement.

Système {ludion} de masse m_L constante ; référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m_L \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$.

Projection sur l'axe Oz vertical vers le bas, avec $\vec{v} = v\,\vec{k}$ ($v > 0$ à la descente) :

$$m_L\, g - \rho_{eau}\,(V_{A2} + V_B)\, g - k\, v = m_L \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m_L} v = g\left(1 - \frac{\rho_{eau}\,(V_{A2} + V_B)}{m_L}\right)}$$

PIÈGE
Les signes de la projection : axe vers le bas, donc $P_z = +P$, $\Pi_z = -\Pi$ et $f_z = -k\,v$.

2.3 Montrer que l'équation est de la forme $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + A\,v = B$, donner B en fonction de m_L, ρ_{eau}, V_B et V_{A2}, vérifier que $B = 0{,}29$ SI et préciser son unité.

Données utiles $m_L = 6{,}8 \times 10^{-3}$ kg ; $V_B = 1{,}8 \times 10^{-6}$ m^3 ; $V_{A2} = 4{,}8 \times 10^{-6}$ m^3 ; $g = 9{,}8$ m · s^{-2} ; $k = 1{,}6 \times 10^{-2}$ kg · s^{-1}

Par identification avec l'équation de la question 2.2 :

$$A = \frac{k}{m_L} \qquad B = g\left(1 - \frac{\rho_{eau}\,(V_{A2} + V_B)}{m_L}\right)$$

$$B = 9{,}8 \times \left(1 - \frac{1000 \times 6{,}6 \times 10^{-6}}{6{,}8 \times 10^{-3}}\right) = 0{,}29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

B a la dimension de $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, une accélération (le facteur entre parenthèses est sans unité).

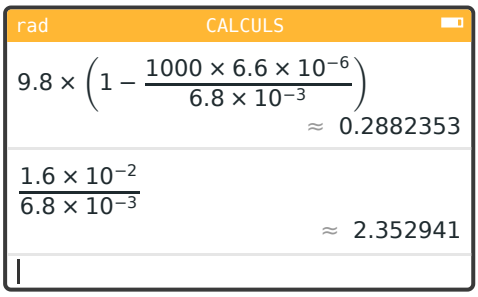
Vérification de A : $A = \dfrac{1{,}6 \times 10^{-2}}{6{,}8 \times 10^{-3}} = 2{,}4$ s^{-1}.

$\boxed{B = 0{,}29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$, valeur attendue 0,29 SI

PIÈGE
Oublier d'ajouter V_B à V_{A2} : la poussée porte sur tout le volume du ludion, $6{,}6$ cm^3.

COMPRENDRE
B est l'accélération initiale ($v = 0$) : c'est bien la première valeur de a du tableau, $0{,}29$ m · s^{-2}.

À LA CALCULATRICE



2.4.1 Quelle est la valeur du pas d'itération Δt choisi ?

Les dates du tableau augmentent de $0{,}10$ s d'une ligne à la suivante.

$\boxed{\Delta t = 0{,}10 \text{ s}}$

2.4.2 Déterminer a_4 et v_5 en détaillant les calculs.

Données utiles $A = 2{,}4\ \text{s}^{-1}$; $B = 0{,}29\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $v_4 = 0{,}08\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\Delta t = 0{,}10$ s (Q 2.4.1)

L'équation différentielle donne $a = \dfrac{\text{d}v}{\text{d}t} = B - A\,v$, d'où :

$a_4 = B - A\,v_4 = 0{,}29 - 2{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}098\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \approx 0{,}10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

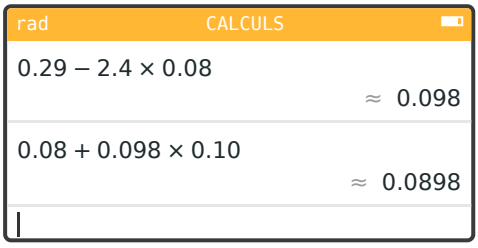
Méthode d'Euler : $a_4 \approx \dfrac{v_5 - v_4}{\Delta t}$, donc $v_5 = v_4 + a_4\,\Delta t$:

$v_5 = 0{,}08 + 0{,}098 \times 0{,}10 = 0{,}09\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$a_4 \approx 0{,}10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $v_5 \approx 0{,}09\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

MÉTHODE
Euler : l'équation différentielle donne a_n à partir de v_n, puis $v_{n+1} = v_n + a_n\,\Delta t$. On contrôle sur la ligne suivante : $0{,}09 + 0{,}07 \times 0{,}10 \approx 0{,}10$.

À LA CALCULATRICE



2.4.3 Sans conclure sur la validité du modèle de frottement, quel serait l'intérêt de diminuer le pas d'itération ?

La méthode d'Euler remplace la dérivée par un taux de variation sur Δt : c'est une approximation, d'autant meilleure que Δt est petit.

Avec un pas plus petit, la courbe calculée se rapproche de la solution exacte de l'équation différentielle (au prix d'un plus grand nombre de calculs).

Diminuer Δt rend la résolution numérique plus précise.

COMPRENDRE
Un pas plus fin rapproche la courbe de la solution du modèle, pas forcément de l'expérience : l'écart restant mesurerait alors les défauts du modèle $f = k\,v$.

2.4.4 Déterminer l'expression de la vitesse limite en fonction de A et B, puis sa valeur, et vérifier l'accord avec l'expérience.

Données utiles $A = 2{,}4\ \text{s}^{-1}$; $B = 0{,}29\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

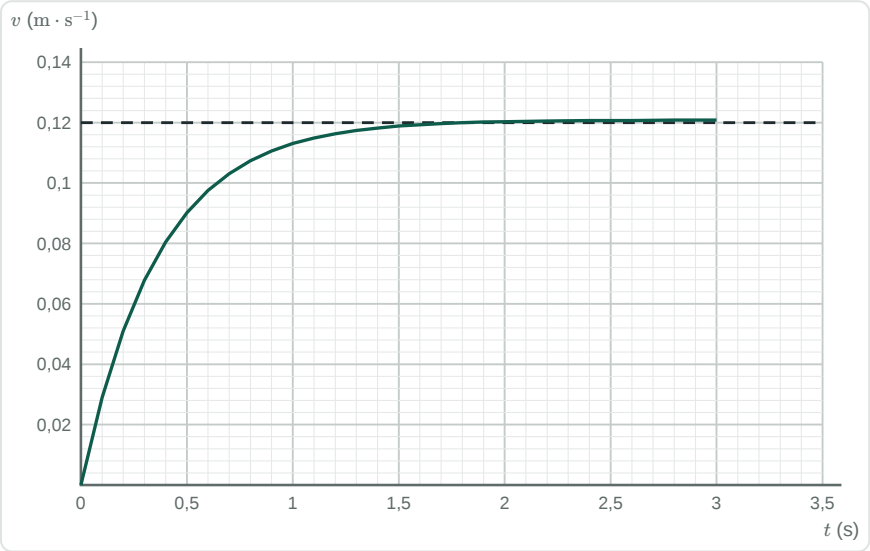
À la vitesse limite, $v = v_{lim}$ est constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ et $A\,v_{lim} = B$:

$$v_{lim} = \frac{B}{A} = \frac{0{,}29}{2{,}4} = 0{,}12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Sur la figure 4, la courbe expérimentale tend vers un palier à $0{,}12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: accord avec le modèle.

$v_{lim} = \dfrac{B}{A} = 0{,}12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, en accord avec le palier expérimental

PIÈGE
Annoncer la vitesse limite sans la comparer au graphique : la seconde partie de la question rapporte aussi des points.



2.4.4 · Vitesse calculée par la méthode d'Euler ($\Delta t = 0{,}10$ s) et vitesse limite

À LA CALCULATRICE

