Laboratoires en impesanteur

Bac S 2012 Inde (Pondichéry) (ancien programme) · Exercice 1 **6,5 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1.1 En appliquant la deuxième loi de Newton à l'avion, déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ de son centre d'inertie, puis ses coordonnées a_x et a_z.

Données utiles chute libre : seule force, le poids ; axe Oz vertical vers le haut

Système {avion}, de masse m constante, étudié dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. En chute libre, il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

$\vec{g}$ est vertical, vers le bas ; Oz est orienté vers le haut :

$\vec{a} = \vec{g}$; $a_x = 0$ et $a_z = -g$

PIÈGE
Écrire $a_z = +g$: le signe dépend de l'orientation de l'axe. Ici Oz monte et $\vec{g}$ descend, donc $a_z = -g$.

COMPRENDRE
L'accélération ne dépend pas de la masse : tout ce qui est dans la cabine tombe avec la même accélération que l'avion, d'où l'impesanteur ressentie à bord.

1.2.1 Établir l'expression littérale des coordonnées $v_x(t)$ et $v_z(t)$ du vecteur vitesse.

Données utiles $\vec{v}_0$ incliné de α sur l'horizontale à $t = 0$; $a_x = 0$, $a_z = -g$ (1.1)

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$: on cherche des primitives de a_x et a_z.

$v_x(t) = C_1$ et $v_z(t) = -g\,t + C_2$.

Conditions initiales : $v_x(0) = v_0 \cos\alpha = C_1$ et $v_z(0) = v_0 \sin\alpha = C_2$.

$v_x(t) = v_0 \cos\alpha$; $\quad v_z(t) = -g\,t + v_0 \sin\alpha$

MÉTHODE
Primitiver puis fixer chaque constante par la condition initiale. Projeter $\vec{v}_0$: la composante adjacente à l'angle α prend le cosinus, l'autre le sinus.

1.2.2 Montrer qu'en unités SI on peut écrire $v_x(t) = 1{,}1 \times 10^2$ et $v_z(t) = -9{,}8\,t + 1{,}2 \times 10^2$.

Données utiles $v_0 = 6{,}0 \times 10^2\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$; $\alpha = 47^\circ$; $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Conversion : $v_0 = \dfrac{6{,}0 \times 10^2 \times 10^3}{3600} = 1{,}7 \times 10^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (soit $166{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, gardé en mémoire).

$v_0 \cos\alpha = 166{,}7 \times \cos 47^\circ = 1{,}1 \times 10^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

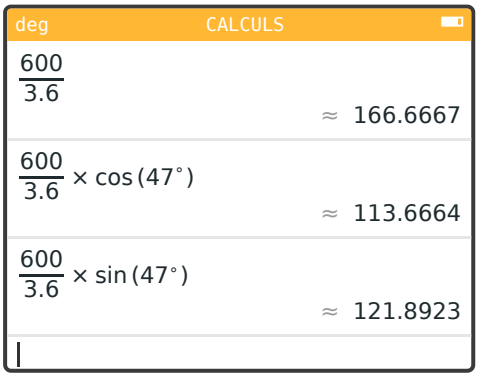
$v_0 \sin\alpha = 166{,}7 \times \sin 47^\circ = 1{,}2 \times 10^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$v_x(t) = 1{,}1 \times 10^2$ et $v_z(t) = -9{,}8\,t + 1{,}2 \times 10^2$ (SI), comme attendu

PIÈGE
Garder v_0 en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$: en SI, les vitesses sont en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (diviser par 3,6). Vérifier aussi que la calculatrice est en degrés.

COMPRENDRE
v_0 a deux chiffres significatifs, d'où $1{,}1 \times 10^2$ et $1{,}2 \times 10^2$; on garde toutefois les valeurs non arrondies pour les calculs suivants.

À LA CALCULATRICE



1.3.1 Expliquer pourquoi $v_z = 0$ au sommet S de la trajectoire.

Avant S, l'altitude z augmente ($v_z > 0$) ; après S, elle diminue ($v_z < 0$). En S, z est maximale.

En S, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, donc horizontal : $v_z = 0$

COMPRENDRE
v_x reste constante et non nulle : au sommet, l'avion ne s'arrête pas, il avance à $1{,}1 \times 10^2$ m · s^{-1}.

1.3.2 En déduire, à partir de $v_z(t)$ (1.2.2), que la phase ascendante de chute libre dure environ 12 s.

Données utiles $v_z(t) = -9{,}8\,t + 1{,}2 \times 10^2$ (1.2.2)

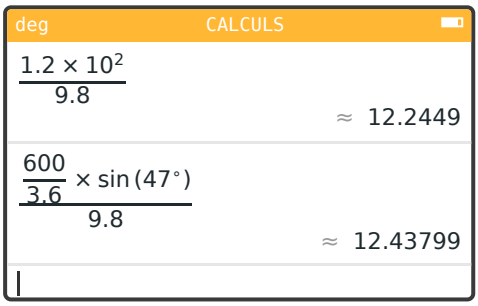
En S, à la date t_S : $v_z(t_S) = 0$, soit $-g\,t_S + v_0 \sin\alpha = 0$, donc $t_S = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$.

$$t_S = \frac{1{,}2 \times 10^2}{9{,}8} = 12 \text{ s}$$

$t_S \approx 12$ s, valeur attendue

COMPRENDRE
Avec la valeur non arrondie $v_0 \sin\alpha = 121{,}9$ m · s^{-1}, on trouve $t_S = 12{,}4$ s. Les deux arrondis donnent 12 s ; la chute libre complète dure environ $2\,t_S \approx 25$ s, comme dans le document.

À LA CALCULATRICE



1.4.1 Établir les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement de l'avion.

Données utiles à $t = 0$, l'avion est en $x = 0$ et $z = z_0 = 8{,}0 \times 10^3$ m (figure)

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$: on cherche des primitives de v_x et v_z.

$x(t) = 1{,}1 \times 10^2\,t + C_3$ et $z(t) = -4{,}9\,t^2 + 1{,}2 \times 10^2\,t + C_4$.

Conditions initiales : $x(0) = 0 = C_3$ et $z(0) = z_0 = C_4$.

$x(t) = 1{,}1 \times 10^2\,t$; $\quad z(t) = -4{,}9\,t^2 + 1{,}2 \times 10^2\,t + 8{,}0 \times 10^3$ (SI)

PIÈGE
Oublier le facteur $\frac{1}{2}$: une primitive de $-9{,}8\,t$ est $-4{,}9\,t^2$. Oublier aussi la constante z_0, l'altitude de départ n'est pas nulle.

1.4.2 En déduire l'altitude maximale atteinte par l'avion. Est-elle compatible avec celle du document ?

Données utiles t_S (1.3.2) ; altitude du sommet dans le document : 8700 m

L'altitude est maximale en S, à la date $t_S = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$:

$$z_{\max} = z(t_S) = -\frac{1}{2} g\,t_S^2 + v_0 \sin\alpha\; t_S + z_0 = z_0 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

$$z_{\max} = 8{,}0 \times 10^3 + \frac{121{,}9^2}{2 \times 9{,}8} = 8{,}8 \times 10^3 \text{ m}$$

L'écart avec 8700 m est d'environ 1 %, dans la précision des données (deux chiffres significatifs).

$z_{\max} \approx 8{,}8$ km : compatible avec les 8,7 km du document

PIÈGE
Remplacer t par 25 s : c'est la durée totale de la chute libre, l'avion est alors redescendu à 8000 m.

COMPRENDRE
Avec les coefficients arrondis de 1.4.1, on obtient 8,7 km : les deux résultats sont acceptables. Le léger écart vient aussi du modèle, qui néglige ce qui reste des forces de l'air.

À LA CALCULATRICE

deg CALCULS

$$8000 + \frac{\left(\frac{600}{3.6} \times \sin(47°)\right)^2}{2 \times 9.8} \approx 8758.047$$

$$(-4.9) \times 12.43798812^2 + 1.2 \times 10^2 \times 12.43798812 + 8000 \approx 8734.511$$

2.1 Représenter sur l'annexe la force d'attraction gravitationnelle exercée sur la station ; donner l'expression de sa norme F.

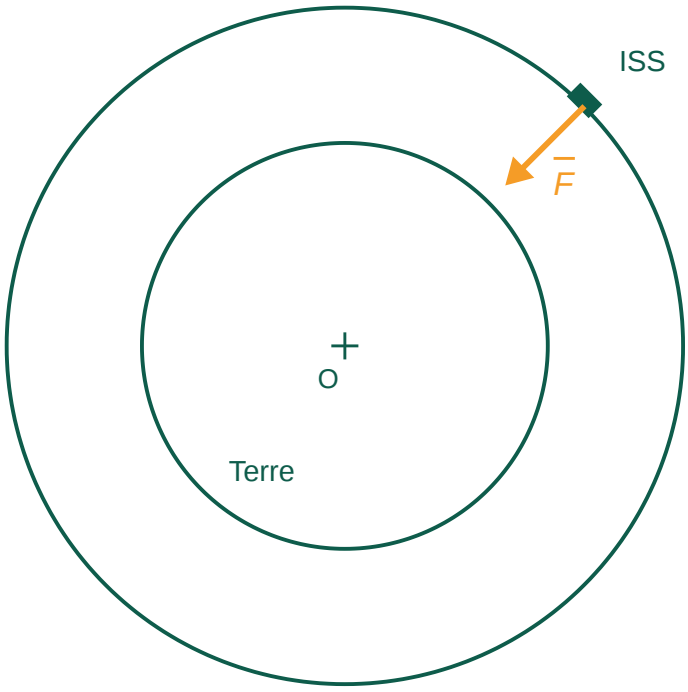
Données utiles masse de l'ISS m ; altitude z ; M_T, R_T, G

La force $\vec{F}$ exercée par la Terre est appliquée au centre de la station, dirigée vers le centre de la Terre (voir l'annexe).

La distance entre les centres vaut $R_T + z$.

$$F = \frac{G\,m\,M_T}{(R_T + z)^2}$$

PIÈGE
Écrire z^2 au lieu de $(R_T + z)^2$: la loi de Newton utilise la distance entre les centres des deux corps.



2.1 · Annexe complétée : force exercée par la Terre sur l'ISS

2.2 Par la deuxième loi de Newton, établir l'expression de la norme a de l'accélération de la station ; représenter $\vec{a}$ sur l'annexe.

Données utiles F (2.1)

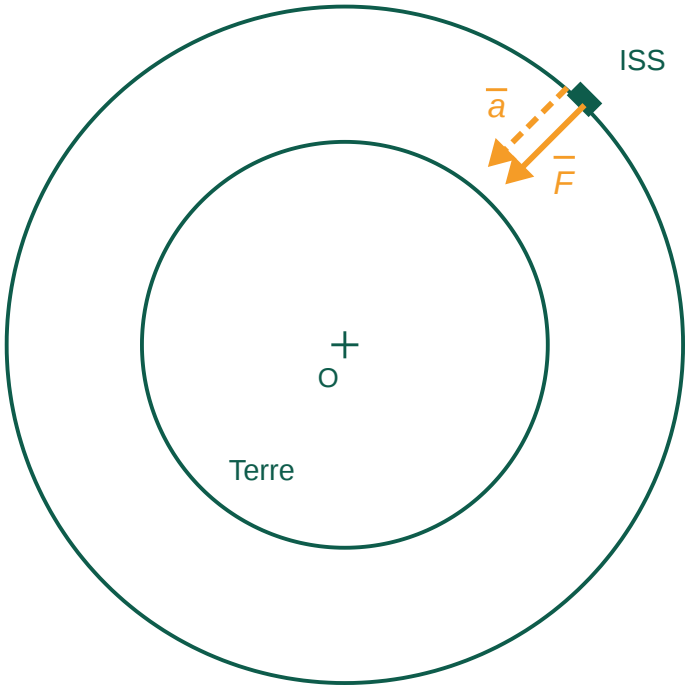
Système {station}, de masse m, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen ; seule force : $\vec{F}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m\,\vec{a}$. En normes : $\dfrac{G\,m\,M_T}{(R_T+z)^2} = m\,a$.

$\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ avec $m > 0$: $\vec{a}$ a la même direction et le même sens que $\vec{F}$, vers le centre de la Terre (voir l'annexe).

$$a = \frac{G\,M_T}{(R_T+z)^2}$$

COMPRENDRE
L'accélération est centripète bien que la vitesse garde la même valeur : c'est la direction du vecteur vitesse qui change. L'échelle de $\vec{a}$ est sans lien avec celle de $\vec{F}$.



2.2 · Annexe complétée : force et accélération de l'ISS

2.3.1 Établir l'expression littérale de la vitesse v du satellite en fonction de G, M_T, R_T et z.

Données utiles $a = \dfrac{v^2}{r}$ avec $r = R_T + z$; a (2.2)

Avec $r = R_T + z$: $\dfrac{v^2}{R_T+z} = \dfrac{G\,M_T}{(R_T+z)^2}$, donc $v^2 = \dfrac{G\,M_T}{R_T+z}$.

v étant positive :

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T+z}}$$

COMPRENDRE
La vitesse ne dépend pas de la masse de la station : un astronaute et la station ont la même orbite, d'où l'impesanteur à bord.

2.3.2 Calculer la valeur numérique de la vitesse orbitale du satellite.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$; $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km ; $z = 3{,}5 \times 10^2$ km

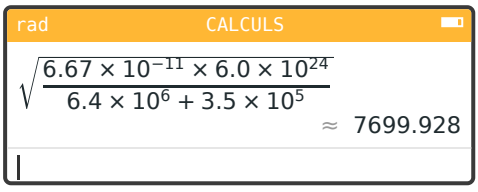
Longueurs en mètres : $R_T + z = 6{,}4 \times 10^6 + 3{,}5 \times 10^5 = 6{,}75 \times 10^6$ m.

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 6{,}0 \times 10^{24}}{6{,}75 \times 10^6}} = 7{,}7 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v = 7{,}7 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $7{,}7\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE
Laisser R_T et z en kilomètres : avec G en unités SI, la distance doit être en mètres, sinon le résultat est faux d'un facteur $\sqrt{1000}$.

À LA CALCULATRICE



2.3.3 Exprimer la période T de révolution du satellite en fonction de v, R_T et z.

Pendant une période T, le satellite parcourt à vitesse constante le périmètre $2\pi(R_T + z)$ de son orbite : $v = \dfrac{2\pi(R_T + z)}{T}$.

$$T = \frac{2\pi\,(R_T + z)}{v}$$

2.3.4 Calculer la période de révolution, puis le nombre de révolutions effectuées chaque jour par la station.

Données utiles v (2.3.2) ; $R_T + z = 6{,}75 \times 10^6$ m ; 1 jour $= 86\,400$ s

$$T = \frac{2\pi \times 6{,}75 \times 10^6}{7{,}70 \times 10^3} = 5{,}5 \times 10^3\ \text{s}\ \ (\text{environ } 1\ \text{h } 32\ \text{min})$$

Nombre de révolutions par jour : $N = \dfrac{86\,400}{T} = \dfrac{86\,400}{5{,}51 \times 10^3} = 15{,}7.$

$T = 5{,}5 \times 10^3$ s ; environ 16 révolutions par jour

3e partie (comparaison). À bord de l'ISS, l'impesanteur est permanente : les expériences peuvent durer des jours ou des mois, alors qu'un vol parabolique n'offre qu'environ 25 s d'impesanteur par parabole.

PIÈGE
Diviser 24 par T en secondes : exprimer la journée et la période dans la même unité.

COMPRENDRE
La troisième partie, sans numéro dans le sujet, est corrigée ici. L'ISS est en chute libre permanente autour de la Terre : elle tombe vers le centre sans jamais se rapprocher du sol.

À LA CALCULATRICE

