La suspension de la 2 cV Citroën

Bac S 2012 Asie (ancien programme) · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Dans l'expression $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, que représente k ? Quelle est son unité ?

k est la constante de raideur du ressort : la force de rappel vaut k fois l'allongement du ressort.

k s'exprime en $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$

COMPRENDRE
En unités de base : $\mathrm{N \cdot m^{-1} = kg \cdot s^{-2}}$.

1.2 En déduire l'expression littérale de k.

On élève $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ au carré : $T_0^2 = 4\pi^2 \dfrac{m}{k}$.

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$$

PIÈGE
Oublier d'élever 2π au carré : on obtient alors $2\pi\, m/T_0^2$, faux d'un facteur 2π.

1.3 Calculer k sachant que T_0 vaut environ une demi-seconde.

Données utiles $m = 100$ kg ; $T_0 \approx 0{,}50$ s

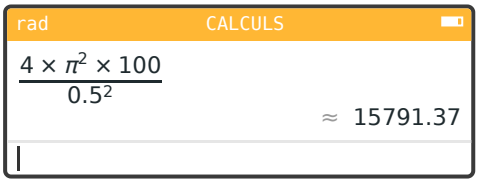
D'après Q1.2, avec $m = 100$ kg et $T_0 = 0{,}50$ s :

$$k = \frac{4\pi^2 \times 100}{0{,}50^2} = 1{,}6 \times 10^4 \ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

$k \approx 1{,}6 \times 10^4 \ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$

COMPRENDRE
Donnée peu précise (« environ ») : deux chiffres significatifs, pas 15 791.

À LA CALCULATRICE



1.4 Faire le bilan des forces appliquées à la masse m dans la position de la figure 2 et les représenter sur l'annexe, sans souci d'échelle.

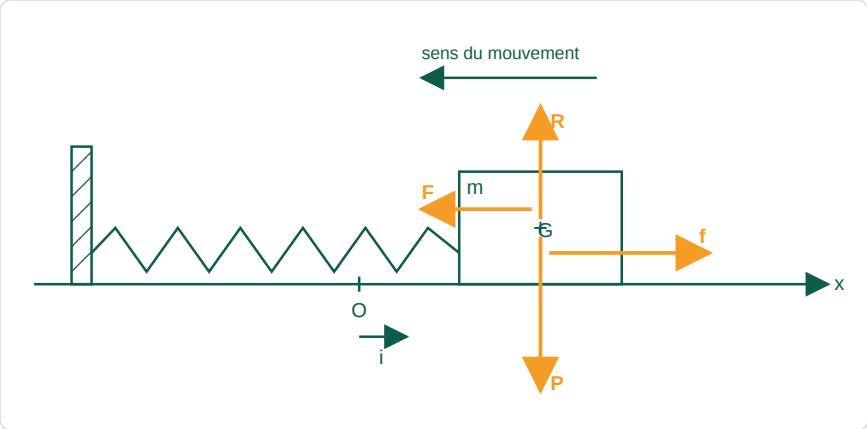
Système : la masse m, dans le référentiel terrestre. Dans la position de la figure 2, G est à droite de O ($x > 0$, ressort allongé) et la masse se déplace vers la gauche.

- le poids $\vec{P}$: vertical, vers le bas ;
- la réaction normale du support $\vec{R}$: verticale, vers le haut, $\vec{R} = -\vec{P}$;
- la force de rappel du ressort $\vec{F}$: horizontale, vers la gauche (vers O), car le ressort est allongé ;
- la force de frottement $\vec{f}$: horizontale, vers la droite, opposée à la vitesse.

Quatre forces : $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{F}$ vers la gauche, $\vec{f}$ vers la droite (voir l'annexe complétée)

PIÈGE
Orienter $\vec{f}$ selon $-\vec{i}$ par habitude : le frottement s'oppose au mouvement, qui va ici vers la gauche, donc $\vec{f}$ est vers la droite.

COMPRENDRE
$\vec{F}$ dépend de la position (vers O), $\vec{f}$ dépend du sens de la vitesse : ici elles sont opposées.



1.4 · Annexe complétée : forces appliquées à la masse m

1.5 Avec la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle du mouvement et montrer qu'elle est du type $a_x + \alpha\, v_x + \dfrac{k}{m}\, x = 0$.

Système : la masse m ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m\,\vec{a}$.

Projection sur l'axe (Ox) : $P_x = R_x = 0$; $F_x = -k\,x$ (rappel vers O) ; $f_x = -\mu\, v_x$ (opposée à la vitesse).

$$-k\,x - \mu\, v_x = m\, a_x$$

On divise par m et on regroupe :

$a_x + \dfrac{\mu}{m}\, v_x + \dfrac{k}{m}\, x = 0$: c'est bien la forme attendue.

PIÈGE
Écrire $f_x = +\mu\, v_x$ parce que $\vec{f}$ pointe vers la droite sur la figure : ici $v_x < 0$, donc $-\mu\, v_x > 0$ convient aussi.

MÉTHODE
Projeter chaque force avec son signe : une force toujours opposée à une grandeur (position ou vitesse) s'écrit $-k\,x$ ou $-\mu\, v_x$, valable quel que soit le sens.

1.5.1 Exprimer α en fonction de μ et m.

Données utiles équation obtenue en Q1.5

Par identification de $a_x + \dfrac{\mu}{m}\, v_x + \dfrac{k}{m}\, x = 0$ avec $a_x + \alpha\, v_x + \dfrac{k}{m}\, x = 0$:

$\alpha = \dfrac{\mu}{m}$

1.5.2 Avec $\alpha = 0$, montrer que $x(t) = X_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\, t + \varphi\right)$ est solution de $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}\, x = 0$, quelles que soient X_m et φ.

Données utiles $k = \dfrac{4\pi^2\, m}{T_0^2}$ (Q1.2)

On dérive deux fois :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -X_m\, \frac{2\pi}{T_0}\, \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\, t + \varphi\right) \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -X_m \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\, t + \varphi\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}\, x$$

D'après Q1.2, $\dfrac{k}{m} = \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}$, donc :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\, x = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}\, x + \frac{4\pi^2}{T_0^2}\, x = 0$$

L'égalité est vraie pour tout t, quelles que soient X_m et φ : $x(t)$ est solution.

PIÈGE
Oublier le facteur $\dfrac{2\pi}{T_0}$ à chaque dérivation (dérivée d'une fonction composée), ou le signe « $-$ » de la dérivée du cosinus.

COMPRENDRE
X_m et φ ne sont pas fixées par l'équation : elles dépendent des conditions initiales (position et vitesse à $t = 0$).

1.5.3 Quel type d'oscillations obtient-on si α est nul ?

Sans frottement, aucune énergie n'est dissipée : $x(t)$ est une sinusoïde de période T_0.

Oscillations libres non amorties : périodiques, d'amplitude X_m constante.

1.5.4 Une 2 CV passe une bosse à 20 km/h. Décrire son mouvement après la bosse si chaque suspension est un oscillateur élastique sans frottement.

La bosse écarte la caisse de sa position d'équilibre puis la libère : la suspension oscille librement.

Sans frottement, la caisse oscille verticalement indéfiniment, avec une amplitude constante et la période propre $T_0 \approx 0{,}5$ s.

COMPRENDRE
Un tel mouvement de pompage sans fin serait inconfortable et dangereux (perte d'appui des roues) : c'est la raison d'être des amortisseurs, vue en Q2.4.

2.1 À quel type d'oscillations la suspension est-elle soumise ? À quelle condition entre-t-elle en résonance ?

La route bosselée impose son rythme à la suspension (excitateur), qui joue le rôle de résonateur.

Oscillations forcées ; résonance quand la période des bosses (excitateur) est égale à la période propre T_0 de la suspension.

COMPRENDRE
En oscillations forcées, le système oscille à la période de l'excitateur, pas à sa période propre. À la résonance, l'amplitude devient maximale.

2.2 Calculer la durée Δt mise par la 2 CV pour parcourir la distance d.

Données utiles $v = 5{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $d = 1{,}00$ m

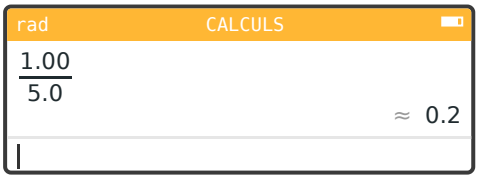
Mouvement uniforme : $v = \dfrac{d}{\Delta t}$, donc $\Delta t = \dfrac{d}{v}$.

$$\Delta t = \frac{1{,}00}{5{,}0} = 0{,}20\ \text{s}$$

$\Delta t = 0{,}20$ s

COMPRENDRE
Δt est la durée entre deux bosses successives : c'est la période de l'excitateur.

À LA CALCULATRICE



2.3 Comparer Δt et T_0. La suspension entre-t-elle en résonance ?

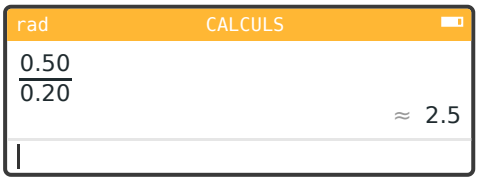
Données utiles $\Delta t = 0{,}20$ s (Q2.2) ; $T_0 \approx 0{,}50$ s (Q1.3)

$\dfrac{T_0}{\Delta t} = \dfrac{0{,}50}{0{,}20} = 2{,}5$: la période de l'excitateur est nettement plus courte que la période propre.

$\Delta t \neq T_0$: la suspension n'entre pas en résonance.

COMPRENDRE
La résonance aurait lieu pour $\Delta t = T_0$, soit $v = \dfrac{d}{T_0} = 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ environ (7 km/h).

À LA CALCULATRICE



2.4 Quel élément de la figure 1 permet de limiter la résonance ? Justifier.

Les amortisseurs (6) exercent une force de frottement fluide : ils augmentent l'amortissement (μ donc α plus grands).

Plus l'amortissement est grand, plus l'amplitude à la résonance est faible (résonance floue).

Les amortisseurs (6) limitent la résonance en augmentant l'amortissement.

PIÈGE
Citer les ressorts (2/3) : ils fixent la raideur k donc T_0, mais ne dissipent pas d'énergie.