Spécialité : La quête du GRAVE

Bac S 2013 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 4 **5 points** **Durée conseillée 50 min**

1 Donner la relation liant la fréquence f du mode fondamental, la longueur L de la corde et la célérité v de l'onde, puis montrer qu'elle s'écrit $f = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.

Données utiles document 1 : $L = \dfrac{\lambda}{2}$ et $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

La longueur d'onde vérifie $\lambda = \dfrac{v}{f}$, donc $f = \dfrac{v}{\lambda}$. Dans le mode fondamental, $L = \dfrac{\lambda}{2}$, soit $\lambda = 2L$:

$$f = \frac{v}{2L}$$

Comme $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, on obtient bien la relation demandée.

$$\boxed{f = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

COMPRENDRE
Cet exercice appartenait à l'enseignement de spécialité de l'ancien Bac S. La relation $\lambda = \dfrac{v}{f}$ figure toujours au programme actuel.

2 Avec la même tension et la même masse linéique que la corde « mi_0 » de la contrebasse, que dire de la longueur L_{-1} nécessaire pour émettre un do_{-1} ? Quelle difficulté rencontre le luthier ?

Données utiles document 2 : $f_{\text{mi}_0} = 41{,}2$ Hz, $f_{\text{do}_{-1}} = 16{,}3$ Hz ; $L_0 = 1{,}05$ m ; document 3 : cordes de $2{,}18$ m ; $f = \dfrac{v}{2L}$ (1)

Si T et μ sont les mêmes pour les deux cordes, la célérité v est la même, et le produit $f \times L = \dfrac{v}{2}$ aussi :

$f_{\text{do}_{-1}} \times L_{-1} = f_{\text{mi}_0} \times L_0$, d'où $L_{-1} = \dfrac{f_{\text{mi}_0}}{f_{\text{do}_{-1}}} \times L_0$

$$L_{-1} = \frac{41{,}2}{16{,}3} \times 1{,}05 = 2{,}65 \text{ m}$$

Difficulté. Cette corde serait plus longue que celles prévues par le cahier des charges ($2{,}18$ m), pour un instrument qui mesure déjà environ 4 m. Le luthier ne peut donc pas se contenter d'allonger la corde.

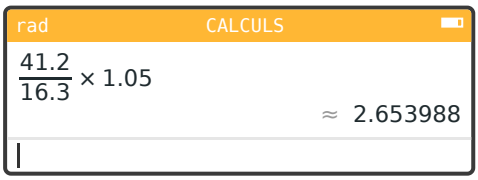
$\boxed{L_{-1} = 2{,}65 \text{ m}}$, supérieure aux $2{,}18$ m imposés.

PIÈGE
Inverser le rapport des fréquences. Un son plus grave demande une corde plus longue : L_{-1} doit être supérieure à L_0. Un résultat de $0{,}415$ m signale l'erreur.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme toutes les données. La notion de hauteur d'une note n'est plus au programme actuel de spécialité.

MÉTHODE
Quand T et μ ne changent pas, $f \times L$ est constant : fréquence et longueur sont inversement proportionnelles. Le rapport des fréquences donne directement le rapport des longueurs, sans calculer v.

À LA CALCULATRICE



3 Problème. Sans l'hypothèse précédente, quelle(s) solution(s) technique(s) le luthier peut-il proposer pour que, en respectant le cahier des charges, une même corde de l'octobasse puisse émettre un do$_{-1}$ et aussi un ré$_{-1}$?

Données utiles $L = 2{,}18$ m à vide ; $f_{\text{do}_{-1}} = 16{,}3$ Hz ; $f_{\text{ré}_{-1}} = 18{,}3$ Hz ; $f_{\text{mi}_0} = 41{,}2$ Hz ; $L_0 = 1{,}05$ m ; $f = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ (1) ; $L_{-1} = 2{,}65$ m (2)

1. Obtenir le do$_{-1}$ à vide avec $L = 2{,}18$ m. La longueur est imposée et inférieure à $2{,}65$ m (2). D'après $f = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, il faut alors diminuer le rapport $\dfrac{T}{\mu}$, c'est-à-dire la célérité $v = 2Lf$:

corde de l'octobasse : $v = 2 \times 2{,}18 \times 16{,}3 = 71{,}07 \approx 71{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

corde « mi$_0$ » de la contrebasse : $v_0 = 2 \times 1{,}05 \times 41{,}2 = 86{,}52 \approx 86{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\frac{T/\mu}{T_0/\mu_0} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \left(\frac{71{,}07}{86{,}52}\right)^2 = 0{,}675$$

Le luthier choisit donc une corde **moins tendue** et/ou **de masse linéique plus grande** (corde plus grosse ou plus dense). À tension égale, par exemple, μ doit être multipliée par $\dfrac{1}{0{,}675} = 1{,}48$.

2. Obtenir le ré$_{-1}$ avec la même corde. La corde est la même : T et μ sont fixées, donc v aussi. Le ré$_{-1}$ est plus aigu ($18{,}3$ Hz $> 16{,}3$ Hz) : il faut **raccourcir la partie vibrante** de la corde. C'est le rôle des doigts métalliques commandés par les manettes.

Comme $f \times L$ est constant : $L_{\text{ré}} = \dfrac{f_{\text{do}_{-1}}}{f_{\text{ré}_{-1}}} \times L$

$$L_{\text{ré}} = \frac{16{,}3}{18{,}3} \times 2{,}18 = 1{,}94 \text{ m}$$

Le doigt métallique doit appuyer à $2{,}18 - 1{,}94 = 0{,}24$ m de l'extrémité haute de la corde.

Regard critique. $1{,}94 \text{ m} < 2{,}18 \text{ m}$: la solution respecte le cahier des charges. Retendre la corde donnerait aussi un ré$_{-1}$, mais on ne peut pas le faire en jouant.

Corde de $2{,}18$ m moins tendue et/ou plus lourde par mètre (T/μ multiplié par $0{,}675$) pour le do$_{-1}$ à vide ; un doigt métallique réduit la longueur vibrante à $L_{\text{ré}} = 1{,}94$ m pour le ré$_{-1}$.

PIÈGE
Proposer de changer la tension pour passer du do$_{-1}$ au ré$_{-1}$: l'énoncé demande que la même corde joue les deux notes. Seule la longueur vibrante peut varier pendant le jeu.

COMPRENDRE
Le do$_{-1}$ ($16{,}3$ Hz) est sous la limite audible de 20 Hz donnée par le document 1 : l'oreille ne perçoit pas le fondamental seul. La limite du grave vient aussi de l'auditeur.

MÉTHODE
Résolution de problème : séparer ce qui est fixé à la fabrication (T, μ, longueur à vide) de ce qui change pendant le jeu (longueur vibrante), puis chiffrer chaque solution et la confronter au cahier des charges.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$2 \times 2.18 \times 16.3$

≈ 71.068

$2 \times 1.05 \times 41.2$

≈ 86.52

$\left(\frac{71.068}{86.52}\right)^2$

≈ 0.6747069

$\frac{1}{0.675}$

≈ 1.481481

$\frac{16.3}{18.3} \times 2.18$

≈ 1.941749

$2.18 - 1.94$

≈ 0.24