L'ascenseur spatial

Bac S 2013 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 1 **5 points** **Durée conseillée 50 min**

1.1 Sans calcul, définir un satellite géostationnaire, puis donner sa vitesse et sa période dans le référentiel terrestre et dans le référentiel géocentrique.

Un satellite géostationnaire est un satellite en orbite équatoriale qui reste en permanence à la verticale du même point de l'équateur (document 1) : il paraît immobile vu du sol.

- Référentiel terrestre : le satellite est immobile, sa vitesse est nulle. Il ne décrit aucune trajectoire : il n'a pas de période de révolution dans ce référentiel.
- Référentiel géocentrique : il tourne avec la Terre et fait un tour pendant que la Terre fait un tour sur elle-même, soit $T_{\text{Géo}} = 24$ h. Sa vitesse se lit sur la droite V_O du document 2 à $z = 36 \times 10^3$ km.

Terrestre : $v = 0$. Géocentrique : $v \approx 3\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ et $T_{\text{Géo}} = 24$ h.

PIÈGE
Donner une seule vitesse. La vitesse dépend du référentiel : nulle par rapport au sol, environ $3\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ par rapport au centre de la Terre.

COMPRENDRE
Le satellite est un point de l'ascenseur : sa vitesse dans le référentiel géocentrique est la vitesse orbitale V_O tracée dans le document 2.

1.2 À partir de la deuxième loi de Kepler, montrer que le mouvement du satellite géostationnaire, de trajectoire circulaire, est uniforme.

Deuxième loi de Kepler : le segment reliant le centre de la Terre au satellite balaie des aires égales pendant des durées égales.

La trajectoire est un cercle centré sur la Terre : le segment garde une longueur constante $r = R_T + h$. Des aires balayées égales correspondent alors à des arcs de cercle de même longueur.

Le satellite parcourt donc des distances égales pendant des durées égales : la valeur de sa vitesse est constante.

Le mouvement du satellite est circulaire et **uniforme**.

PIÈGE
Citer la loi sans l'exploiter. Le lien attendu est : rayon constant, donc aires égales signifie arcs égaux, donc vitesse de valeur constante.

1.3 Donner la direction et le sens du vecteur accélération du satellite géostationnaire dans le référentiel géocentrique, puis montrer que ces résultats sont conformes à la deuxième loi de Newton.

Dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire de rayon r :
$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_T + \dfrac{v^2}{r}\,\vec{u}_N$.

Le mouvement est uniforme (1.2) : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $\vec{a} = \dfrac{v^2}{r}\,\vec{u}_N$.
L'accélération est portée par le rayon de l'orbite et dirigée vers le centre de la Terre.

Deuxième loi de Newton. Système {satellite} de masse m, référentiel géocentrique galiléen, seule force : l'attraction gravitationnelle de la Terre $\vec{F} = \dfrac{G\,m\,M_T}{r^2}\,\vec{u}_N$.

$\vec{F} = m\,\vec{a}$ donne $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{G\,M_T}{r^2}\,\vec{u}_N$: même direction et même sens que la force, qui pointe vers le centre de la Terre.

$\vec{a}$ est **radiale** (selon la droite satellite-Terre) et **centripète** (vers le centre de la Terre), en accord avec la deuxième loi de Newton.

PIÈGE
Écrire que l'accélération est nulle parce que le mouvement est uniforme. La valeur de la vitesse est constante, mais sa direction change : $\vec{a} \neq \vec{0}$.

MÉTHODE
Deux raisonnements indépendants à confronter : la cinématique (Frenet avec v constante) puis la dynamique ($\vec{a} = \vec{F}/m$). Ils doivent donner la même direction et le même sens.

1.4 Établir l'expression de la vitesse v du satellite géostationnaire dans le référentiel géocentrique en fonction de $T_{\text{Géo}}$, R_T et h, puis calculer sa valeur.

Données utiles $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km ; $h = 36 \times 10^3$ km ; $T_{\text{Géo}} = 24$ h (1.1)

Le mouvement est uniforme : pendant une période $T_{\text{Géo}}$, le satellite parcourt le périmètre de son orbite, cercle de rayon $R_T + h$.

$$v = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{T_{\text{Géo}}}$$

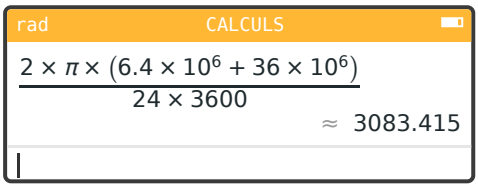
$$v = \frac{2\pi \times (6{,}4 \times 10^6 + 36 \times 10^6)}{24 \times 3600} = 3{,}1 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v = 3{,}1 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3{,}1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE
Prendre h comme rayon de l'orbite : le centre du cercle est le centre de la Terre, le rayon vaut $R_T + h$. Convertir aussi les km en m et les heures en s.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme R_T et h. Le résultat confirme la lecture graphique de la question 1.1 (environ $3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$).

À LA CALCULATRICE



1.5 D'après le texte, que faut-il « rajouter » à un satellite géostationnaire pour réaliser un ascenseur spatial ? Pourquoi est-il essentiel de placer le satellite à 36 000 km ?

Il faut ajouter au satellite un câble descendant jusqu'au sol, le long duquel montent les cabines. Pour que ce câble ne soit pas entraîné vers la Terre, il est déployé en même temps vers l'espace : la partie haute retient la partie basse.

À 36 000 km d'altitude, sur l'orbite équatoriale, le satellite est géostationnaire : il reste à la verticale du même point du sol, où l'on peut construire la base de départ.

Un câble relié au sol (et prolongé vers l'espace) ; à 36 000 km le satellite reste fixe au-dessus de la base, le câble reste donc tendu à la verticale.

COMPRENDRE
À une autre altitude, la période du satellite ne vaudrait plus 24 h : il défilerait par rapport au sol et le câble ne pourrait pas rester accroché à une base fixe.

2 Sans souci d'échelle, représenter sur un schéma la Terre, le satellite géostationnaire, le câble, la cabine à l'altitude h' et ses vecteurs vitesse ascensionnelle $\overrightarrow{V_A}$ et orbitale $\overrightarrow{V_O}$.

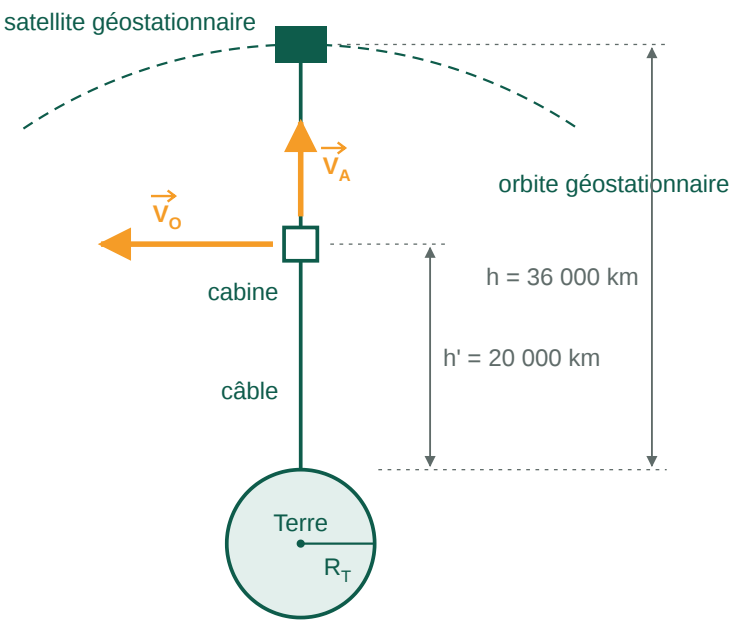
Données utiles $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km ; $h = 36\,000$ km ; $h' = 20\,000$ km

Voir le schéma. Les altitudes h et h' sont mesurées à partir du sol, le long du câble.

$\overrightarrow{V_A}$ est porté par le câble et dirigé vers le satellite (la cabine monte). $\overrightarrow{V_O}$ est perpendiculaire au câble, dans le sens de rotation de la Terre.

Schéma ci-dessous : $\overrightarrow{V_A}$ le long du câble, vers le haut ; $\overrightarrow{V_O}$ perpendiculaire au câble.

PIÈGE
Tracer $\overrightarrow{V_O}$ le long du câble ou $\overrightarrow{V_A}$ tangent à l'orbite. La vitesse orbitale est perpendiculaire au câble, la vitesse ascensionnelle est portée par lui.



2 · Schéma de l'ascenseur spatial (sans souci d'échelle), dans le référentiel géocentrique

2.2 Montrer que l'expression $V_O(z) = \dfrac{2\pi\,(R_T + z)}{T_{\text{Géo}}}$ est cohérente avec l'allure de la courbe de la vitesse orbitale du document 2.

En développant : $V_O(z) = \dfrac{2\pi}{T_{\text{Géo}}}\,z + \dfrac{2\pi\,R_T}{T_{\text{Géo}}}$.

$T_{\text{Géo}}$ et R_T sont constants : V_O est une fonction affine de z, de coefficient directeur positif $\dfrac{2\pi}{T_{\text{Géo}}}$ et d'ordonnée à l'origine positive $\dfrac{2\pi\,R_T}{T_{\text{Géo}}}$.

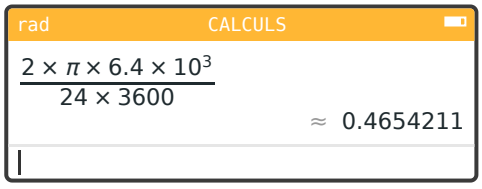
Sur le document 2, la courbe V_O est bien une droite croissante qui ne passe pas par l'origine.

$V_O(z)$ est affine et croissante : sa représentation est une droite d'ordonnée à l'origine non nulle, comme sur le document 2.

COMPRENDRE

L'ordonnée à l'origine, $2\pi R_T / T_{\text{Géo}} \approx 0{,}47\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$, est la vitesse d'un point de l'équateur entraîné par la rotation de la Terre.

À LA CALCULATRICE



2.3 En faisant référence au document 1, calculer la valeur de la vitesse moyenne ascensionnelle de la cabine.

Données utiles $h = 36\,000$ km ; durée de la montée : environ 5 jours (document 1)

La cabine parcourt la longueur h du câble en une durée $\Delta t \approx 5$ jours.

$$V_A = \frac{h}{\Delta t} = \frac{36 \times 10^6}{5 \times 24 \times 3600} = 83\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$V_A \approx 83\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit environ $8 \times 10^1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (environ $3 \times 10^2\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$).

COMPRENDRE

La durée n'est connue qu'à un chiffre (« environ cinq » jours) : le résultat est un ordre de grandeur, proche de la vitesse d'un TGV.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{36 \times 10^6}{5 \times 24 \times 3600} \approx 83.33333$

$\dfrac{36 \times 10^3}{5 \times 24} \approx 300$

2.4 Comparer la vitesse moyenne ascensionnelle à la vitesse orbitale à l'altitude h'.

Données utiles $h' = 20\,000$ km ; $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km ; $T_{\text{Géo}} = 24$ h ; $V_A = 83\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (2.3)

$$V_O(h') = \frac{2\pi\,(R_T + h')}{T_{\text{Géo}}}$$

$$V_O(h') = \frac{2\pi \times (6{,}4 \times 10^6 + 20 \times 10^6)}{24 \times 3600} = 1{,}9 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette valeur est cohérente avec la lecture du document 2 à $z = 20 \times 10^3$ km.

$$\frac{V_O(h')}{V_A} = \frac{1{,}9 \times 10^3}{83} \approx 23$$

$V_O(h') = 1{,}9\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$: la vitesse orbitale est environ 23 fois plus grande que la vitesse ascensionnelle.

PIÈGE

Comparer sans chiffrer, ou avec des unités différentes ($\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$). Une comparaison se conclut par un rapport.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{2 \times \pi \times (6.4 \times 10^6 + 20 \times 10^6)}{24 \times 3600} \approx 1919.862$

$\dfrac{1.9 \times 10^3}{83} \approx 22.89157$

2.5.1 Estimer l'altitude minimale de l'ascenseur spatial pour qu'un satellite largué à son sommet s'échappe de l'attraction terrestre.

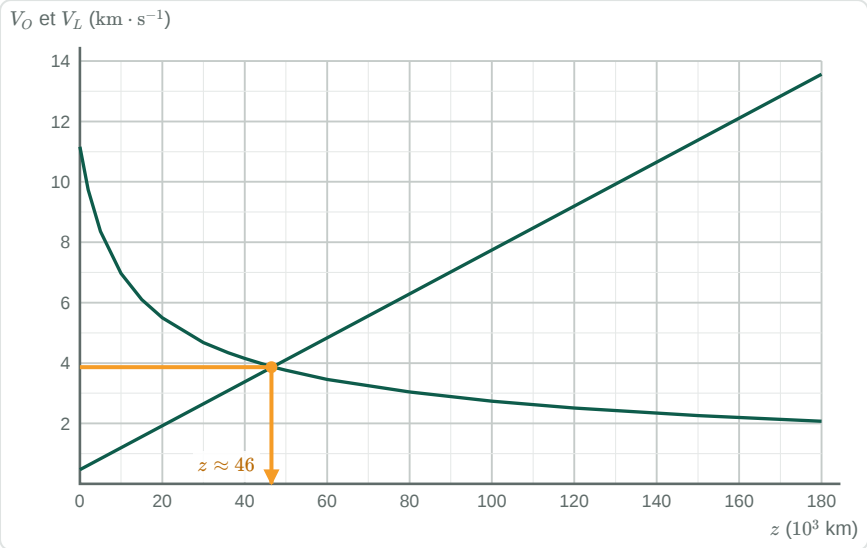
Un satellite largué sans moteur à l'altitude z possède la vitesse orbitale $V_O(z)$ du point de l'ascenseur qu'il quitte. Il s'échappe si cette vitesse atteint ou dépasse la vitesse de libération : $V_O(z) \geqslant V_L(z)$.

Sur le document 2, V_O croît et V_L décroît : la condition est remplie à partir de l'intersection des deux courbes, d'abscisse $z \approx 46 \times 10^3$ km.

Altitude minimale : $z_{\min} \approx 4{,}6 \times 10^4$ km, soit environ 46 000 km.

COMPRENDRE

Au-delà de 46 000 km, la rotation de la Terre, transmise par le câble, suffit à libérer le satellite. Le câble doit donc dépasser largement l'orbite géostationnaire.



2.5.1 · Document 2 : V_L (courbe décroissante) et V_O (droite croissante) ; lecture de l'intersection

2.5.2 Estimer l'énergie cinétique à communiquer à un satellite de masse m en orbite géostationnaire pour qu'il s'échappe de l'attraction terrestre. Comment cette énergie peut-elle lui être communiquée ?

Données utiles $m = 1{,}5 \times 10^3$ kg ; $v = 3{,}1$ km · s^{-1} (1.4) ; document 2 : $V_L \approx 4{,}4$ km · s^{-1} à $z = 36 \times 10^3$ km

Sur l'orbite géostationnaire, le satellite a la vitesse $v = 3{,}1$ km · s^{-1}. Pour s'échapper, il doit atteindre la vitesse de libération à cette altitude, lue sur le document 2 : $V_L \approx 4{,}4$ km · s^{-1}.

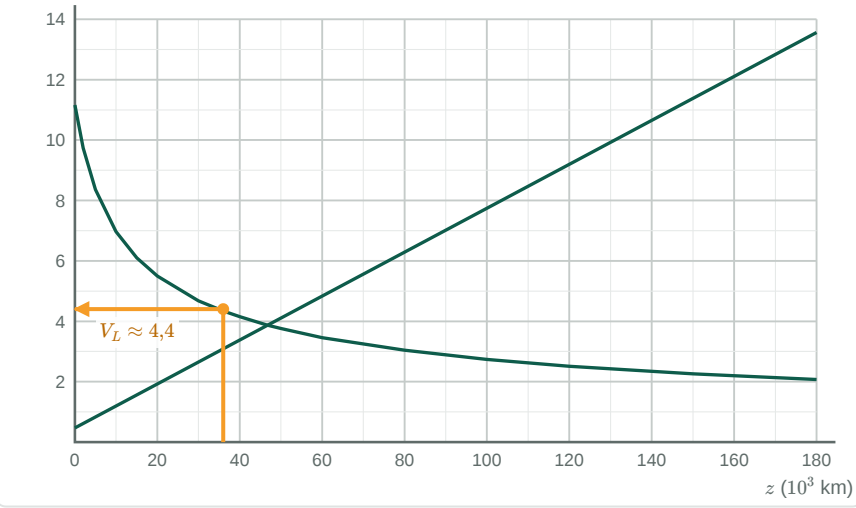
L'énergie cinétique à fournir est la variation :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m V_L^2 - \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (V_L^2 - v^2)$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \times 1{,}5 \times 10^3 \times \left[(4{,}4 \times 10^3)^2 - (3{,}1 \times 10^3)^2\right] = 7{,}3 \times 10^9 \text{ J}$$

Cette énergie peut être apportée par un moteur qui accélère le satellite.

$\Delta E_c \approx 7{,}3 \times 10^9$ J, fournie par un moteur (propulseur).



2.5.2 · Document 2 : lecture de V_L à l'altitude géostationnaire

PIÈGE

Calculer $\frac{1}{2}m(V_L - v)^2$: la différence des carrés n'est pas le carré de la différence. Convertir aussi les vitesses en m · s^{-1}.

COMPRENDRE

Le satellite possède déjà de l'énergie cinétique sur son orbite : seul le complément est à fournir. En poursuivant la montée le long du câble au-delà de 46 000 km (2.5.1), aucun moteur ne serait nécessaire.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$0.5 \times 1.5 \times 10^3 \times \left((4.4 \times 10^3)^2 - (3.1 \times 10^3)^2\right)$

$\approx 7.3125 \times 10^9$