Eruption de la montagne pelée en 1902

Bac S 2012 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 1 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Pourquoi peut-on dire que le bloc est en chute libre ?

Dans le référentiel terrestre, on néglige la poussée d'Archimède et les frottements de l'air : le bloc n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Le bloc n'est soumis qu'à son poids : il est en chute libre.

COMPRENDRE
« Chute libre » ne veut pas dire « tomber verticalement » : un mouvement qui monte puis redescend, ou une trajectoire parabolique, reste une chute libre tant que le poids est la seule force.

1.2 Établir, avec la deuxième loi de Newton, la relation entre $\vec{a}$ et $\vec{g}$, puis donner $a_x(t)$ et $a_z(t)$.

Système {bloc}, de masse m constante, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\,\vec{g} = m\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$$

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical vers le bas : $\vec{g}\,(0\,;\,-g)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

$\vec{a} = \vec{g}\,;\quad a_x(t) = 0$ et $a_z(t) = -g$

PIÈGE
Le signe : l'axe (Oz) est orienté vers le haut et $\vec{g}$ vers le bas, donc $a_z = -g$. Écrire $a_z = g$ fausse toute la suite.

1.3 En déduire les expressions de $v_x(t)$ et $v_z(t)$.

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, donc par intégration (primitives) :

$v_x(t) = C_1 \qquad v_z(t) = -g\,t + C_2$

Conditions initiales : $\vec{v}(0) = \vec{v}_0\,(v_0\cos\alpha\,;\,v_0\sin\alpha)$, d'où $C_1 = v_0\cos\alpha$ et $C_2 = v_0\sin\alpha$.

$v_x(t) = v_0\cos\alpha \qquad v_z(t) = -g\,t + v_0\sin\alpha$

MÉTHODE
Chaque intégration fait apparaître une constante ; on la fixe toujours avec la condition initiale correspondante, en projetant $\vec{v}_0$ sur les axes à l'aide d'un schéma.

1.4 Montrer que $x(t) = (v_0\cos\alpha)\,t$ et $z(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + (v_0\sin\alpha)\,t$.

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, donc par intégration :

$x(t) = (v_0\cos\alpha)\,t + C_3 \qquad z(t) = -\dfrac{1}{2}g\,t^2 + (v_0\sin\alpha)\,t + C_4$

À $t = 0$, le bloc est en O : $x(0) = 0$ et $z(0) = 0$, donc $C_3 = C_4 = 0$.

$x(t) = (v_0\cos\alpha)\,t \qquad z(t) = -\dfrac{1}{2}g\,t^2 + (v_0\sin\alpha)\,t$: ce sont bien les expressions demandées.

2.1 Préciser $v_x(t)$, $v_z(t)$, $x(t)$ et $z(t)$ lorsque la vitesse initiale $\vec{v}_{01}$ est verticale.

Vitesse initiale verticale vers le haut : $\alpha = 90^\circ$, avec $\cos 90^\circ = 0$ et $\sin 90^\circ = 1$.

$v_x(t) = 0 \quad v_z(t) = -g\,t + v_{01} \quad x(t) = 0 \quad z(t) = -\dfrac{1}{2}g\,t^2 + v_{01}\,t$

COMPRENDRE
$x(t) = 0$ à tout instant : le bloc reste sur l'axe (Oz), la trajectoire est bien rectiligne verticale, comme l'annonce le texte.

2.2 À partir de $v_z(t)$, déterminer l'expression de la date t_S où l'altitude maximale h est atteinte.

Au sommet, le bloc s'arrête avant de redescendre : $v_z(t_S) = 0$, soit $-g\,t_S + v_{01} = 0$.

$$t_S = \frac{v_{01}}{g}$$

2.3 En déduire que $v_{01} = \sqrt{2gh}$.

À la date t_S, $z(t_S) = h$:

$$h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_{01}}{g}\right)^2 + v_{01}\,\frac{v_{01}}{g} = -\frac{v_{01}^2}{2g} + \frac{v_{01}^2}{g} = \frac{v_{01}^2}{2g}$$

D'où $v_{01}^2 = 2gh$, et comme $v_{01} > 0$:

$v_{01} = \sqrt{2\,g\,h}$, la relation du texte 1.

MÉTHODE
Altitude maximale : on écrit $v_z = 0$ pour trouver la date, puis on reporte cette date dans $z(t)$.

2.4 Calculer v_{01} pour $h = 400$ m.

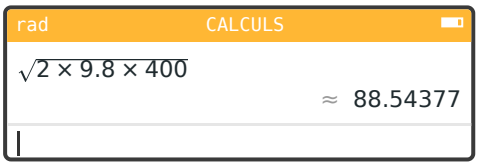
Données utiles $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $h = 400$ m

$$v_{01} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 400} = 89\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v_{01} \approx 89\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (environ $320\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$)

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme $g = 9{,}8$: la donnée la moins précise fixe la précision du résultat.

À LA CALCULATRICE



3.1.1 À l'aide des équations horaires, établir l'équation de la trajectoire.

Avec $v_0 = v_{02}$: $x = (v_{02}\cos\alpha)\,t$, donc $t = \dfrac{x}{v_{02}\cos\alpha}$. On reporte dans $z(t)$:

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{02}\cos\alpha}\right)^2 + v_{02}\sin\alpha\,\frac{x}{v_{02}\cos\alpha}$$

$$z(x) = -\frac{g}{2\,v_{02}^2\cos^2\alpha}\,x^2 + (\tan\alpha)\,x$$

COMPRENDRE
z est un polynôme du second degré en x : la trajectoire est une portion de parabole, tournée vers le bas.

MÉTHODE
Équation de la trajectoire : isoler t dans $x(t)$, puis le remplacer dans $z(t)$. Le temps doit disparaître.

3.1.2 En déduire l'expression de v_{02}, la calculer et la comparer à la valeur du texte 2.

Données utiles $\alpha = 43^\circ$; point d'impact A : $x_A = 1{,}8 \times 10^3$ m et $z_A = -800$ m ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Le point A appartient à la trajectoire : $z_A = -\dfrac{g\,x_A^2}{2\,v_{02}^2\cos^2\alpha} + x_A\tan\alpha$, donc

$$v_{02}^2 = \frac{g\,x_A^2}{2\cos^2\alpha\,(x_A\tan\alpha - z_A)} \quad\Rightarrow\quad v_{02} = \frac{x_A}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2\,(x_A\tan\alpha - z_A)}}$$

$$v_{02} = \frac{1{,}8\times10^3}{\cos 43^\circ}\sqrt{\frac{9{,}8}{2\times(1{,}8\times10^3\times\tan 43^\circ + 800)}} = 1{,}1\times10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v_{02} \approx 1{,}1\times10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: en accord avec les $110\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ du texte 2.

PIÈGE
A est 800 m plus bas que O : $z_A = -800$ m, pas $+800$ m. Avec le mauvais signe, on obtient $v_{02} \approx 184\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

COMPRENDRE
La distance de 1,8 km est donnée à deux chiffres significatifs et « environ » : l'accord avec 110 m/s est très bon à cette précision.

À LA CALCULATRICE

deg CALCULS

$\frac{1800}{\cos(43°)} \times \sqrt{\frac{9.8}{2 \times (1800 \times \tan(43°) + 800)}} \approx 109.4325$

3.2.1 Exprimer puis calculer les énergies cinétique, potentielle et mécanique initiales du bloc ($E_p = 0$ pour $z = 0$).

Données utiles $m = 500$ kg ; $v_{02} = 110\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$E_c(0) = \frac{1}{2} m v_{02}^2 = \frac{1}{2} \times 500 \times 110^2 = 3{,}0 \times 10^6$ J

$E_p(0) = m\,g\,z(0) = 0$ J, car $z(0) = 0$

$E_m(0) = E_c(0) + E_p(0)$

$\boxed{E_c(0) = 3{,}0 \times 10^6 \text{ J} ; E_p(0) = 0 \text{ J} ; E_m(0) = 3{,}0 \times 10^6 \text{ J}}$

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$0.5 \times 500 \times 110^2 \approx 3025000$

3.2.2 Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du bloc au sommet C de la trajectoire.

En C, $v_z = 0$ et v_x garde sa valeur initiale (Q1.3) : $v_C = v_{02} \cos\alpha$.

$E_c(C) = \frac{1}{2} m (v_{02} \cos\alpha)^2 = \frac{1}{2} \times 500 \times (110 \times \cos 43°)^2 = 1{,}6 \times 10^6$ J

L'énergie mécanique se conserve : $E_p(C) = E_m(0) - E_c(C) = 3{,}03 \times 10^6 - 1{,}62 \times 10^6 = 1{,}4 \times 10^6$ J

$\boxed{E_c(C) = 1{,}6 \times 10^6 \text{ J} ; E_p(C) = 1{,}4 \times 10^6 \text{ J}}$

PIÈGE

Au sommet, la vitesse n'est pas nulle : seule sa composante verticale l'est. Prendre $E_c(C) = 0$ revient à traiter un lancer vertical.

À LA CALCULATRICE

deg CALCULS

$0.5 \times 500 \times (110 \times \cos(43°))^2 \approx 1618007$

$3\,025\,000 - 1\,618\,006.667 \approx 1406993$

3.2.3 En déduire l'altitude maximale h' atteinte par le bloc, mesurée à partir de O.

$E_p(C) = m\,g\,h'$, donc

$$h' = \frac{E_p(C)}{m\,g} = \frac{1{,}41 \times 10^6}{500 \times 9{,}8} = 2{,}9 \times 10^2 \text{ m}$$

$\boxed{h' \approx 2{,}9 \times 10^2 \text{ m}}$

MÉTHODE

Garder les valeurs non arrondies en mémoire pour les calculs enchaînés ; on n'arrondit que le résultat affiché. On vérifie aussi que $h' = \frac{(v_{02} \sin\alpha)^2}{2g}$ donne la même valeur.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{1\,406\,993.333}{500 \times 9.8} \approx 287.1415$

3.2.4 Identifier les courbes $x(t)$ et $z(t)$ de l'annexe, puis déterminer graphiquement la distance horizontale x_C parcourue au sommet.

Données utiles $h' \approx 2{,}9 \times 10^2$ m (Q3.2.3) ; annexe : courbes n°1 et n°2

$x(t) = (v_{02}\cos\alpha)\,t$ est une fonction linéaire du temps : sa courbe est une droite passant par l'origine, c'est la **courbe n°1**.

$z(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + (v_{02}\sin\alpha)\,t$ est une fonction du second degré : sa courbe est une parabole tournée vers le bas, c'est la **courbe n°2**.

Sur la courbe n°2, le sommet ($z = h' \approx 290$ m) est atteint à $t_C \approx 7{,}7$ s.
Sur la courbe n°1, à cette date : $x \approx 6 \times 10^2$ m.

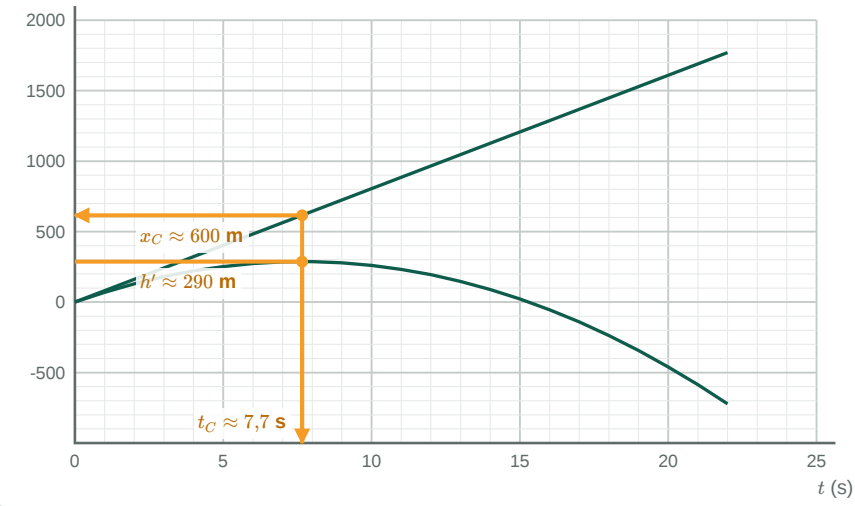
Courbe n°1 : $x(t)$; courbe n°2 : $z(t)$; $x_C \approx 6 \times 10^2$ m

COMPRENDRE

Le calcul confirme la lecture : $t_C = \dfrac{v_{02}\sin\alpha}{g} \approx 7{,}7$ s et $x_C = v_{02}\cos\alpha \times t_C \approx 616$ m.

MÉTHODE

Lecture sur deux courbes : trouver la date sur l'une (le sommet de z), puis reporter cette même date sur l'autre. Les tracés de lecture doivent figurer sur l'annexe rendue.



3.2.4 · Annexe complétée : sommet de z(t) (courbe n°2), puis lecture de x sur la courbe n°1 à la même date