Principe de fonctionnement d'un GPS

Bac S 2013 Métropole (ancien programme) · Exercice 2 **10 points** **Durée conseillée 1 h 40**

1 Un automobiliste qui sort d'une ville française lit Lyon à 240 km et Nancy à 340 km. Trouver graphiquement cette ville sur la carte de l'annexe 1 et justifier.

Données utiles échelle de la carte : 100 km ↔ 1,2 cm environ

Sur la carte, la barre de 100 km mesure 1,2 cm.

Rayons à tracer : $\frac{240 \times 1{,}2}{100} = 2{,}9$ cm autour de Lyon et $\frac{340 \times 1{,}2}{100} = 4{,}1$ cm autour de Nancy.

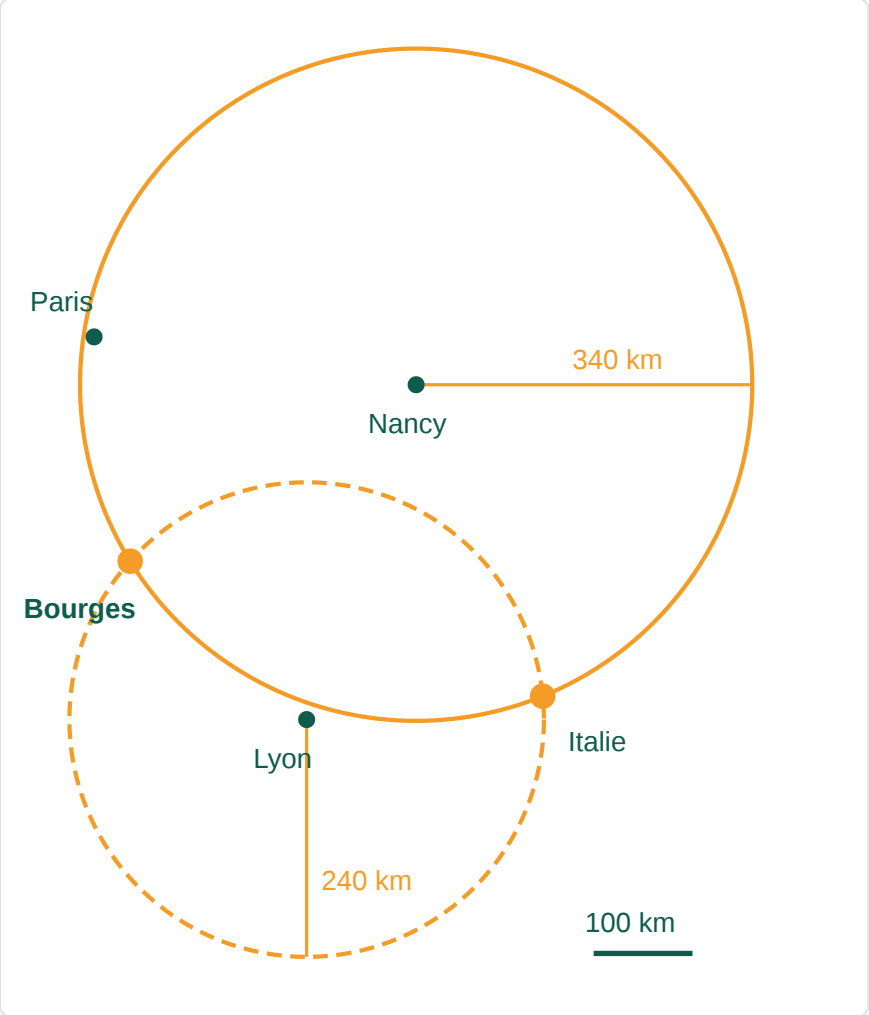
Tous les points situés à 240 km de Lyon forment un cercle centré sur Lyon (rayon 2,9 cm sur la carte) ; ceux à 340 km de Nancy, un cercle centré sur Nancy (rayon 4,1 cm). L'automobiliste est sur les deux à la fois, donc à l'une de leurs deux intersections.

L'une est hors de France, du côté de l'Italie ; l'autre tombe sur Bourges. La ville étant française :

l'automobiliste sort de **Bourges**.

PIÈGE
La carte porte déjà plusieurs cercles imprimés qui ne servent à rien ici : tracer les siens au compas, après avoir mesuré l'échelle, et ne pas se laisser guider par ceux qui existent.

COMPRENDRE
Deux distances donnent deux points possibles : c'est pourquoi un GPS a besoin d'un troisième satellite (et en pratique d'un quatrième, pour corriger son horloge).



1 · Construction de l'annexe 1 (positions relatives des villes, échelle respectée)

2.1 L'orbite étant supposée circulaire, montrer que le mouvement d'un satellite GPS de masse m est uniforme.

Système : le satellite, de masse m ; référentiel géocentrique supposé galiléen. Il décrit un cercle de centre O (centre de la Terre) et de rayon $R_T + h$.

Seule force : l'attraction de la Terre, $\vec{F} = \dfrac{G\,m\,M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{n}$, où $\vec{n}$ est dirigé du satellite vers O.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \dfrac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{n}$.

Dans le repère de Frenet $(S, \vec{\tau}, \vec{n})$: $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{\tau} + \dfrac{v^2}{R_T+h}\,\vec{n}$.

En identifiant selon $\vec{\tau}$: $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.

v est constante : le mouvement du satellite est **uniforme**.

PIÈGE
L'accélération n'est pas nulle : elle est centripète. Ce qui prouve l'uniformité, c'est l'absence de composante selon $\vec{\tau}$.

MÉTHODE
Autre démarche acceptée : la deuxième loi de Kepler (aires égales en durées égales) appliquée à une orbite circulaire donne des arcs égaux en durées égales, donc une vitesse constante.

2.2 Montrer que $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R_T+h}}$ et calculer sa valeur.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$; $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}38 \times 10^{3}$ km ; $h = 2{,}00 \times 10^{4}$ km

En identifiant selon $\vec{n}$ (Q2.1) : $\dfrac{v^2}{R_T+h} = \dfrac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}$, d'où $v^2 = \dfrac{G\,M_T}{R_T+h}$

et, v étant positive :

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T+h}}$$

Avec $R_T + h = 6{,}38 \times 10^6 + 2{,}00 \times 10^7 = 2{,}638 \times 10^7$ m :

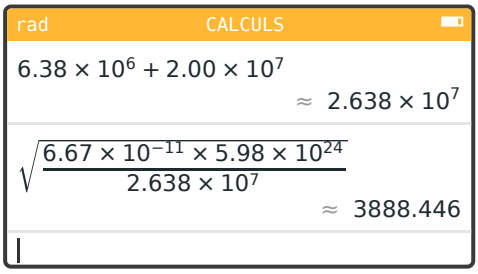
$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{2{,}638 \times 10^7}}$$

$v = 3{,}89 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (3,89 km/s)

PIÈGE
R_T et h sont donnés en km : les convertir en mètres avant le calcul, puisque G est en unités SI. Et ne pas oublier R_T : la distance au centre de la Terre n'est pas l'altitude.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme les données les moins précises (G, M_T, R_T, h).

À LA CALCULATRICE



2.3 Établir l'expression de la période de révolution, la calculer et vérifier qu'elle est compatible avec le texte d'introduction.

Données utiles $v = 3{,}89 \times 10^3$ m · s^{-1} (Q2.2) ; $R_T + h = 2{,}638 \times 10^7$ m

Le mouvement est circulaire uniforme : en une période T, le satellite parcourt $2\pi(R_T + h)$ à la vitesse v, donc $T = \dfrac{2\pi(R_T + h)}{v}$.

En remplaçant v par son expression :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G\,M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(2{,}638 \times 10^7)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}} = 4{,}26 \times 10^4 \text{ s}$$

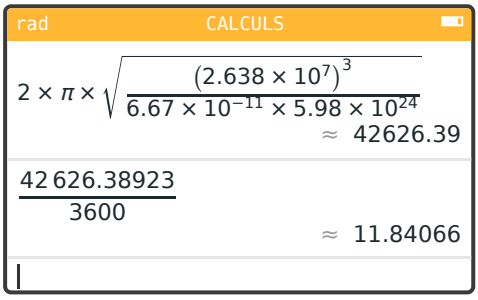
Soit $T = \dfrac{4{,}26 \times 10^4}{3600} = 11{,}8$ h, environ 12 h : en 24 h le satellite fait deux tours, ce qu'annonce le texte.

$T = 4{,}26 \times 10^4$ s $\approx 11{,}8$ h, soit deux révolutions par jour

PIÈGE
Calculer avec la valeur arrondie de v donne $4{,}26 \times 10^4$ s aussi, mais garder la formule littérale évite d'accumuler les arrondis.

MÉTHODE
Pour vérifier, on peut aussi calculer $\dfrac{24\text{ h}}{T} = 2{,}03$: on retrouve bien deux révolutions par jour.

À LA CALCULATRICE



3.1 Justifier par le calcul qu'une précision de 10 m sur la distance exige une précision d'environ 30 ns sur la durée du trajet.

Données utiles $c = 3{,}00 \times 10^8$ m · s^{-1}

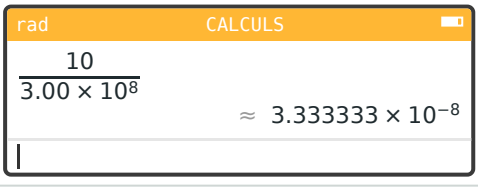
Le signal se propage à la célérité c : une distance d correspond à une durée $\tau = \dfrac{d}{c}$.

Pour $d = 10$ m : $\tau = \dfrac{10}{3{,}00 \times 10^8} = 3{,}3 \times 10^{-8}$ s $= 33$ ns.

$\tau = 33$ ns, soit environ 30 ns comme l'affirme le texte

COMPRENDRE
Une erreur de 33 ns sur la date de réception déplace le point calculé de 10 m le long du rayon. Les ondes électromagnétiques vont si vite que la précision se joue au milliardième de seconde.

À LA CALCULATRICE



3.2 Calculer la durée de parcours du signal, puis la précision relative sur la mesure de cette durée.

Données utiles $h = 2{,}00 \times 10^4$ km ; $c = 3{,}00 \times 10^8$ m · s^{-1} ; précision $\tau = 30$ ns (Q3.1)

Pour un satellite à la verticale du récepteur, le signal parcourt l'altitude h :

$$\Delta t = \frac{h}{c} = \frac{2{,}00 \times 10^7}{3{,}00 \times 10^8} = 6{,}67 \times 10^{-2} \text{ s.}$$

Précision relative : $\dfrac{\tau}{\Delta t} = \dfrac{30 \times 10^{-9}}{6{,}67 \times 10^{-2}} = 4{,}5 \times 10^{-7}$.

$\Delta t = 6{,}67 \times 10^{-2}$ s ; précision relative $\dfrac{\tau}{\Delta t} = 4{,}5 \times 10^{-7}$

PIÈGE
Pour un satellite qui n'est pas à la verticale, la distance dépasse h ; la valeur trouvée est un ordre de grandeur, pas une donnée exacte.

COMPRENDRE
Une précision relative est un rapport de deux durées : elle n'a pas d'unité. Ici, moins d'un millionième de la durée mesurée.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{2.00 \times 10^{7}}{3.00 \times 10^{8}} \approx 0.06666667$

$\dfrac{30 \times 10^{-9}}{6.67 \times 10^{-2}} \approx 4.497751 \times 10^{-7}$

3.3 Donner le décalage entre horloges terrestres et horloges du satellite au bout d'un jour sans correction relativiste, puis la durée au bout de laquelle ce décalage atteint 30 ns.

Données utiles avance des horloges du satellite : 38 µs par jour (texte) ; 1 jour $= 24 \times 3600 = 86\,400$ s

D'après le texte, sans correction les horloges du satellite prennent environ 38 µs d'avance par jour sur les horloges terrestres.

Le décalage croît proportionnellement à la durée : 38 µs en 86 400 s, donc 30 ns au bout de

$$\Delta t' = \frac{30 \times 10^{-9} \times 86\,400}{38 \times 10^{-6}} = 68 \text{ s}$$

décalage de 38 µs par jour ; il atteint 30 ns au bout de $\Delta t' = 68$ s, environ une minute

PIÈGE
Convertir le jour en secondes et µs, ns en secondes avant de faire la proportion.

COMPRENDRE
Sans correction, le GPS dériverait de 10 m environ chaque minute, soit une dizaine de kilomètres par jour. Les effets relativistes (relativité restreinte et générale) ne sont plus au programme de spécialité.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{30 \times 10^{-9} \times 86\,400}{38 \times 10^{-6}} \approx 68.21053$

4.1 Calculer la durée d'envoi d'un message de 4,5 ko, puis commenter cette durée surprenante à l'aide du document.

Données utiles débit : $50 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1}$; 1 octet = 8 bit

Taille du message : $4{,}5 \text{ ko} = 4{,}5 \times 10^{3}$ octets $= 4{,}5 \times 10^{3} \times 8 = 3{,}6 \times 10^{4}$ bit.

Durée d'envoi : $\Delta t = \dfrac{3{,}6 \times 10^{4}}{50} = 7{,}2 \times 10^{2}$ s, soit 12 min.

Attendre 12 minutes à chaque démarrage serait très long. Mais le document précise que le récepteur garde en mémoire les paramètres reçus avant son dernier arrêt et repart de ceux-ci : il n'a pas à recevoir tout le message, et la mise à jour est d'autant plus rapide que le GPS sert souvent.

$\Delta t = 7{,}2 \times 10^{2}$ s, soit 12 min ; le récepteur évite cette attente en réutilisant les paramètres mémorisés

PIÈGE
Oublier le facteur 8 entre octets et bits donne 90 s, une durée qui ne paraît plus surprenante.

COMPRENDRE
Le préfixe k vaut 10^{3} : 1 ko = 1000 octets. Avec 1024 octets, on trouverait $7{,}4 \times 10^{2}$ s, même conclusion. La notion de débit binaire ne figure plus au programme de spécialité.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{4.5 \times 10^{3} \times 8}{50} \approx 720$

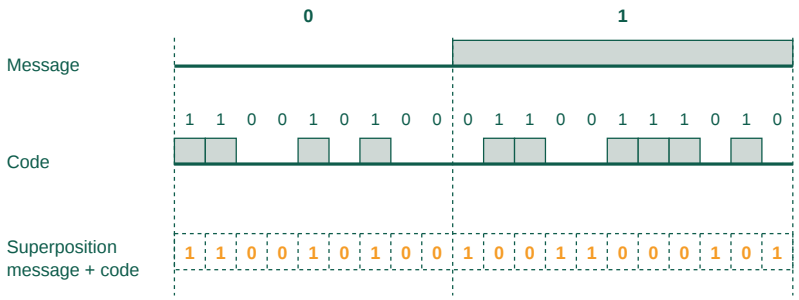
4.2 Compléter l'annexe 2 par 0 ou 1 en effectuant la superposition « message + code » décrite dans le document.

Règle du document : là où le bit du message vaut 0, on recopie le code ; là où il vaut 1, on inverse chaque bit du code.

Sur les 9 premières cases (message 0) : code 1 1 0 0 1 0 1 0 0, recopié.

Sur les 11 suivantes (message 1) : code 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0, inversé en 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1.

superposition : 1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1



4.2 · Annexe 2 complétée (superposition en orange)

PIÈGE
La frontière entre les deux bits du message ne tombe pas au milieu : elle est après la 9e case du code. Suivre le pointillé vertical de l'annexe.

COMPRENDRE
Cette opération est un « ou exclusif » : le récepteur, qui connaît le code du satellite, refait la même opération pour retrouver le message.