Le rugby, sport de contact et d'évitement

Bac S 2013 Liban (ancien programme) · Exercice 2 **8 points** **Durée conseillée 1 h 20**

1.1 Dans quel référentiel les vitesses des joueurs sont-elles définies ?

On mesure ces vitesses par rapport au sol du terrain : c'est le **référentiel terrestre**.

COMPRENDRE
Une vitesse n'a de sens que par rapport à un référentiel. Ici « vitesse négligeable » pour B veut dire : B est quasiment immobile par rapport au sol.

1.2 Le système des deux joueurs étant supposé isolé, exprimer en justifiant la vitesse des deux joueurs liés après l'impact, puis la calculer.

Données utiles $m_A = 115$ kg ; $v_A = 5{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $m_B = 110$ kg ; $v_B \approx 0$

Système {joueur A + joueur B}, dans le référentiel terrestre. Il est isolé : sa quantité de mouvement se conserve entre juste avant et juste après l'impact.

$$\vec{p}_{\text{avant}} = \vec{p}_{\text{après}} \quad \Rightarrow \quad m_A\,\vec{v}_A + m_B\,\vec{v}_B = (m_A + m_B)\,\vec{v}$$

Comme $\vec{v}_B \approx \vec{0}$: $\vec{v} = \dfrac{m_A}{m_A + m_B}\,\vec{v}_A$. Les joueurs liés partent dans le sens du mouvement initial de A, avec

$$v = \frac{m_A}{m_A + m_B}\,v_A = \frac{115}{115 + 110} \times 5{,}0 = 2{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

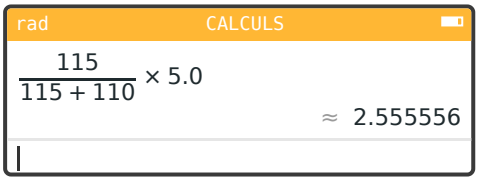
$$\boxed{v = \frac{m_A\,v_A}{m_A + m_B} = 2{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

PIÈGE
Diviser par m_B au lieu de $m_A + m_B$: après l'impact, ce sont les deux joueurs qui avancent ensemble.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme $v_A = 5{,}0$: la donnée la moins précise fixe la précision du résultat.

COMPRENDRE
La quantité de mouvement et sa conservation ne figurent plus au programme actuel de spécialité ; ce raisonnement reste juste mais n'est plus exigé au bac.

À LA CALCULATRICE



2.1.1 Établir les coordonnées a_x et a_y du vecteur accélération du point M représentant le ballon.

Référentiel terrestre supposé galiléen ; système étudié : le ballon, de masse m invariable. L'air étant négligé, la seule force qui s'exerce est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

$\vec{g}$ est vertical, vers le bas, donc de sens opposé à $\vec{j}$:

$$\boxed{a_x = 0 \text{ et } a_y = -g}$$

PIÈGE
Écrire $a_y = g$: l'axe Oy est orienté vers le haut alors que $\vec{g}$ pointe vers le bas.

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton, puis projection sur les axes du repère.

2.1.2 Montrer que les équations horaires du mouvement de M sont $x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t$.

Données utiles $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, faisant l'angle α avec Ox ; M en O à $t = 0$; $a_x = 0$, $a_y = -g$ (2.1.1)

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de a_x et a_y.

$v_x(t) = C_1$ et $v_y(t) = -g\,t + C_2$.

À $t = 0$: $v_x(0) = v_0 \cos\alpha$ et $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$, donc $C_1 = v_0 \cos\alpha$ et $C_2 = v_0 \sin\alpha$:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha \qquad v_y(t) = -g\,t + v_0 \sin\alpha$$

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$: nouvelle primitive.

$x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t + C_3$ et $y(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t + C_4$.

À $t = 0$, M est en O : $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, donc $C_3 = C_4 = 0$.

$x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t$: ce sont bien les équations attendues.

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration ou ne pas les déterminer : c'est la justification par les conditions initiales qui rapporte les points.

2.1.3 En déduire l'équation de la trajectoire $y(x)$.

De $x = (v_0 \cos\alpha)\,t$ on tire $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, que l'on reporte dans $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \times \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Avec $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$:

$$y(x) = -\frac{g}{2\,(v_0 \cos\alpha)^2}\,x^2 + (\tan\alpha)\,x$$

MÉTHODE
Équation de trajectoire = éliminer le temps : isoler t dans l'équation la plus simple, ici $x(t)$, puis le remplacer dans l'autre.

2.1.4 Sur l'annexe, écrire sous chaque courbe l'expression de la grandeur (x, y, v_x, v_y) qui lui correspond, et justifier.

Données utiles $v_0 \cos\alpha = 5{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $v_0 \sin\alpha = 8{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

En haut à gauche : $v_x(t) = v_0 \cos\alpha$. Droite horizontale : seule v_x est constante ; on lit bien $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 10{,}0 \times \cos 60^\circ$.

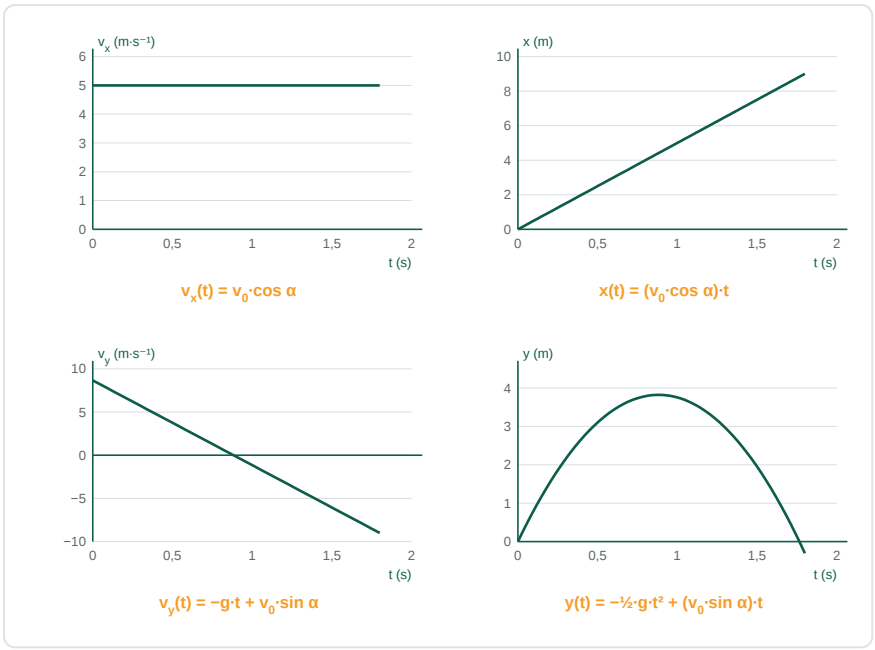
En haut à droite : $x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t$. Droite passant par l'origine : seule x est proportionnelle au temps.

En bas à gauche : $v_y(t) = -g\,t + v_0 \sin\alpha$. Droite décroissante qui ne passe pas par l'origine : seule v_y est une fonction affine du temps de coefficient directeur négatif $-g$; elle part de $8{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et s'annule au sommet de la trajectoire.

En bas à droite : $y(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t$. Parabole tournée vers le bas : seule y est un polynôme du second degré en t, de coefficient $-\frac{g}{2} < 0$.

v_x (droite horizontale), x (droite par l'origine), v_y (droite décroissante), y (parabole)

MÉTHODE
Associer une courbe à une expression par sa forme : constante, linéaire, affine, second degré. Confirmer avec une valeur lue, par exemple l'ordonnée à l'origine.



2.1.4 · Annexe complétée : la grandeur sous chaque courbe

2.2.1 Calculer la durée dont dispose le joueur pour récupérer le ballon avant qu'il ne touche le sol, puis vérifier cette valeur sur un graphe de l'annexe.

Données utiles $v_0 = 10{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\alpha = 60^\circ$; $g = 9{,}81\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$; $y(t)$ (2.1.2)

Le ballon touche le sol quand $y(t) = 0$: $t\left(-\frac{1}{2} g\, t + v_0 \sin\alpha\right) = 0$.

La solution $t = 0$ est l'instant du coup de pied. L'autre solution donne la date de retour au sol :

$$t_s = \frac{2\, v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 \times 10{,}0 \times \sin 60^\circ}{9{,}81} = 1{,}77\ \text{s}$$

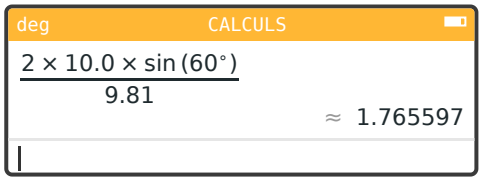
Vérification : sur le graphe $y(t)$ de l'annexe, la parabole recoupe l'axe des temps vers 1,77 s (tracé ci-contre).

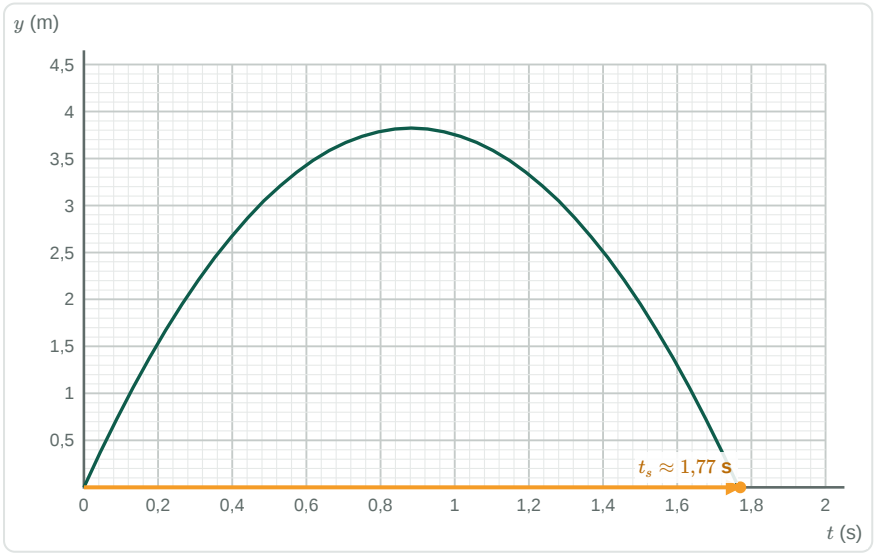
$t_s = 1{,}77$ s

PIÈGE
Calculatrice en radians : $\sin(60)$ en radians donne un résultat négatif, absurde pour une durée.

COMPRENDRE
Le sommet est atteint à $t_s/2 \approx 0{,}88$ s, quand v_y s'annule : on le retrouve sur le graphe $v_y(t)$.

À LA CALCULATRICE





2.2.1 · Graphe $y(t)$ de l'annexe : le ballon revient au sol à $t_s \approx 1{,}77$ s

2.2.2 Déterminer de deux manières différentes la vitesse v_1 du joueur pour que la chandelle soit réussie.

Données utiles $v_0 = 10{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 60^\circ$; $t_s = 1{,}77$ s (2.2.1)

La chandelle est réussie si le joueur, en mouvement rectiligne uniforme selon Ox, se trouve sous le ballon quand il retombe.

Méthode 1. Le joueur et le ballon partent de la même abscisse ; ils restent à la même abscisse si leurs vitesses horizontales sont égales : $v_1 = v_x = v_0 \cos\alpha$.

$$v_1 = 10{,}0 \times \cos 60^\circ = 5{,}00\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(c'est aussi la valeur constante lue sur le graphe $v_x(t)$ de l'annexe).

Méthode 2. Pendant t_s, le ballon parcourt horizontalement $d = x(t_s) = (v_0 \cos\alpha)\, t_s = 10{,}0 \times \cos 60^\circ \times 1{,}766 = 8{,}83$ m.

Le joueur doit parcourir la même distance pendant la même durée : $v_1 = \dfrac{d}{t_s} = \dfrac{8{,}83}{1{,}766} = 5{,}00\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$v_1 = 5{,}00\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ par les deux méthodes

PIÈGE
Utiliser $v_0 = 10{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ comme vitesse du joueur : seule la composante horizontale du ballon compte.

MÉTHODE
Dans un calcul en chaîne, garder la valeur non arrondie de t_s et n'arrondir que le résultat final.

À LA CALCULATRICE

