De la liaison covalente à la spectroscopie infrarouge

Bac S 2013 Antilles-Guyane rattrapage (ancien programme) · Exercice 1 **4 points** **Durée conseillée 40 min**

1.1 La période propre T_0 d'un oscillateur harmonique est-elle proportionnelle à la masse m du solide ? À la constante de raideur k du ressort ? Justifier.

Données utiles documents 2 et 3 (tableaux, figures 1 et 2)

Deux grandeurs sont proportionnelles si la courbe représentant l'une en fonction de l'autre est une droite passant par l'origine.

Figure 1 : la courbe $T_0 = f(m)$ passe par l'origine, mais elle est incurvée. Ce n'est pas une droite. Le tableau le confirme : quand m double (de 50 g à 100 g), T_0 passe de 0,20 s à 0,28 s et ne double pas.

Figure 2 : la courbe $T_0 = f(k)$ est décroissante et incurvée. Ce n'est pas une droite passant par l'origine.

T_0 n'est proportionnelle ni à la masse m, ni à la constante de raideur k.

PIÈGE
Conclure à la proportionnalité parce que T_0 augmente avec m. « Croissante » ne veut pas dire « proportionnelle » : il faut une droite et le passage par l'origine, ou un quotient T_0/m constant.

MÉTHODE
Sans graphique, tester le tableau : si une grandeur double, l'autre doit doubler. Un seul couple de valeurs qui ne respecte pas cette règle suffit à écarter la proportionnalité.

1.2 Parmi les quatre expressions proposées pour T_0, déterminer la seule qui est cohérente avec les observations des documents 2 et 3, en expliquant le raisonnement.

Données utiles expressions proposées : $T_0 = m \times k$; $T_0 = 2\pi \times \dfrac{m}{k}$; $T_0 = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{m}{k}}$; $T_0 = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{1}{m \times k}}$

Figure 3 : la courbe $T_0 = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ est une droite passant par l'origine.

À masse fixée, T_0 est donc proportionnelle à $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Cela écarte $T_0 = m \times k$ (proportionnelle à k) et $T_0 = 2\pi \times \dfrac{m}{k}$ (proportionnelle à $\dfrac{1}{k}$). Il reste les deux expressions avec une racine carrée.

Figure 1 : T_0 augmente quand m augmente. Or, dans $T_0 = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{1}{m \times k}}$, la période diminuerait quand m augmente : cette expression est écartée.

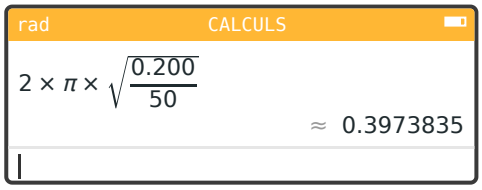
Vérification avec le document 2 ($m = 0{,}200$ kg, $k = 50\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$) : $2\pi \times \sqrt{\dfrac{0{,}200}{50}} = 0{,}40$ s, valeur du tableau.

$$T_0 = 2\pi \times \sqrt{\frac{m}{k}}$$

PIÈGE
Dans la formule, la masse est en kilogrammes : 200 g s'écrit 0,200 kg. Avec des grammes, la vérification numérique donne une période fausse.

MÉTHODE
Procéder par élimination : un document par variable. La figure 3 fixe la dépendance en k, la figure 1 fixe le sens de variation avec m. Une vérification numérique sur une ligne de tableau sécurise la réponse.

À LA CALCULATRICE



2.1 À l'aide du document 4, exprimer la masse réduite m_r en fonction de $m(\mathrm{O})$ et $m(\mathrm{H})$, masses d'un atome d'oxygène et d'un atome d'hydrogène.

Données utiles document 4 : $m_r = \dfrac{m_A \times m_B}{m_A + m_B}$

La liaison O–H relie un atome d'oxygène et un atome d'hydrogène : on prend $m_A = m(\mathrm{O})$ et $m_B = m(\mathrm{H})$ dans la relation du document 4.

$$m_r = \frac{m(\mathrm{O}) \times m(\mathrm{H})}{m(\mathrm{O}) + m(\mathrm{H})}$$

COMPRENDRE
Les deux atomes vibrent en même temps. La masse réduite permet de revenir au cas étudié en partie 1 : un seul solide de masse m_r accroché à un ressort dont l'autre extrémité est fixe.

2.2 En déduire que $m_r = \dfrac{M(\mathrm{O}) \times M(\mathrm{H})}{(M(\mathrm{O}) + M(\mathrm{H})) \times N_A}$, puis calculer la valeur de m_r.

Données utiles $M(\mathrm{H}) = 1{,}0\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$; $M(\mathrm{O}) = 16{,}0\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$; $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$

Une mole contient N_A atomes, donc la masse d'un atome est $m(\mathrm{O}) = \dfrac{M(\mathrm{O})}{N_A}$ et $m(\mathrm{H}) = \dfrac{M(\mathrm{H})}{N_A}$.

On remplace dans l'expression de la question 2.1 :

$$m_r = \frac{\frac{M(\mathrm{O})}{N_A} \times \frac{M(\mathrm{H})}{N_A}}{\frac{M(\mathrm{O})}{N_A} + \frac{M(\mathrm{H})}{N_A}} = \frac{\frac{M(\mathrm{O}) \times M(\mathrm{H})}{N_A^2}}{\frac{M(\mathrm{O}) + M(\mathrm{H})}{N_A}} = \frac{M(\mathrm{O}) \times M(\mathrm{H})}{(M(\mathrm{O}) + M(\mathrm{H})) \times N_A}$$

Application numérique :

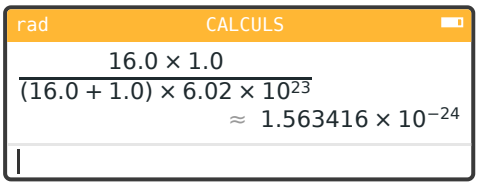
$$m_r = \frac{16{,}0 \times 1{,}0}{(16{,}0 + 1{,}0) \times 6{,}02 \times 10^{23}} = 1{,}6 \times 10^{-24}\ \mathrm{g}$$

$$\boxed{m_r = 1{,}6 \times 10^{-24}\ \mathrm{g} = 1{,}6 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}}$$

PIÈGE
Les masses molaires sont en $\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$: le calcul donne des grammes. Il faut convertir en kilogrammes avant d'utiliser m_r avec k en $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme $M(\mathrm{H}) = 1{,}0\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$, la donnée la moins précise. On garde la valeur non arrondie en mémoire pour la suite. m_r est proche de la masse d'un atome d'hydrogène : c'est surtout lui qui bouge.

À LA CALCULATRICE



2.3 À l'aide des questions 1.2 et 2.2, montrer que la fréquence propre associée à cet oscillateur harmonique vaut $f_0 = 1{,}1 \times 10^{14}$ Hz.

Données utiles $k = 7{,}2 \times 10^2\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$; $m_r = 1{,}56 \times 10^{-27}$ kg (Q2.2, valeur non arrondie) ; $T_0 = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{m}{k}}$ (Q1.2)

La fréquence propre est l'inverse de la période propre : $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$.

Pour la liaison O–H, la masse du solide est la masse réduite : $T_0 = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{m_r}{k}}$, donc

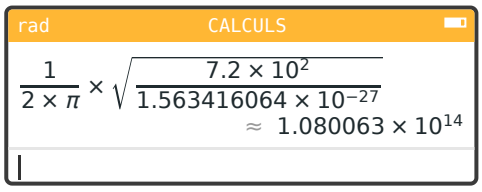
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{k}{m_r}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{7{,}2 \times 10^2}{1{,}56 \times 10^{-27}}} = 1{,}08 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

$$\boxed{f_0 = 1{,}08 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz} \approx 1{,}1 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz}\ \text{: c'est la valeur attendue.}}$$

PIÈGE
Laisser m_r en grammes donne $3{,}4 \times 10^{12}$ Hz, résultat faux d'un facteur $\sqrt{1000}$. Autre oubli fréquent : calculer T_0 et s'arrêter là, sans passer à la fréquence.

À LA CALCULATRICE



2.4 Calculer la longueur d'onde dans le vide associée à f_0 puis, en supposant que le modèle s'applique à la molécule d'eau, préciser à l'aide du document 5 s'il s'agit d'une vibration d'élongation ou de déformation.

Données utiles $c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $f_0 = 1{,}08 \times 10^{14}$ Hz (Q2.3) ; document 5 : élongation à 2,74 µm et 2,66 µm, déformation à 6,27 µm

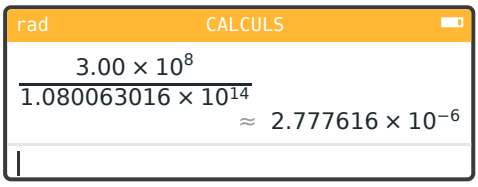
Dans le vide : $\lambda = \dfrac{c}{f_0}$

$$\lambda = \frac{3{,}00 \times 10^{8}}{1{,}08 \times 10^{14}} = 2{,}8 \times 10^{-6}\ \text{m} = 2{,}8\ \mu\text{m}$$

D'après le document 5, les deux modes d'élongation absorbent à 2,74 µm et 2,66 µm, le mode de déformation à 6,27 µm. La valeur calculée est très proche des deux premières et loin de la troisième.

$\lambda = 2{,}8\ \mu\text{m}$: il s'agit d'une vibration d'**élongation**.

À LA CALCULATRICE



COMPRENDRE

Le modèle du ressort décrit une liaison qui s'allonge et se raccourcit : c'est bien une élongation. La déformation fait varier l'angle entre les deux liaisons, ce que ce modèle ne décrit pas.

MÉTHODE

Pour comparer à un spectre infrarouge gradué en nombre d'onde : $\sigma = \dfrac{1}{\lambda}$ avec λ en cm. Ici $\lambda = 2{,}8 \times 10^{-4}$ cm donne $\sigma \approx 3{,}6 \times 10^{3}\ \text{cm}^{-1}$, dans la zone des liaisons O–H.