Un trou noir au centre de la Galaxie

Bac S 2014 Antilles-Guyane (ancien programme) · Exercice 1 **5 points** **Durée conseillée 50 min**

1.1 Énoncer la première loi de Kepler, puis expliquer comment la trajectoire de l'étoile S2 a permis de justifier l'existence d'un trou noir très massif au centre de la Galaxie.

Première loi de Kepler (loi des orbites) : dans le référentiel héliocentrique, le centre de chaque planète décrit une ellipse dont le centre du Soleil occupe l'un des foyers.

Transposée ici : S2 décrit une ellipse dont un foyer est occupé par le centre de l'astre attracteur. Sa trajectoire donne donc la position de cet astre, invisible, et sa forme impose une masse de plusieurs millions de masses solaires.

Or S2 est passée à seulement 17 heures-lumière de ce foyer en restant sur son ellipse : toute la masse tient dans une région plus petite que cette distance. Un amas dense d'étoiles sombres serait bien plus étendu.

La masse est concentrée dans un volume très petit autour du foyer de l'ellipse : seul un trou noir très massif convient.

PIÈGE
S'arrêter à « la trajectoire est une ellipse, donc il y a un trou noir ». L'argument décisif du document 1 est la distance d'approche de 17 heures-lumière, qui exclut un amas d'étoiles.

COMPRENDRE
Les lois de Kepler, établies pour les planètes autour du Soleil, valent pour tout corps en orbite autour d'un astre attracteur bien plus massif que lui.

1.2 Pour quelle raison doit-on utiliser l'optique adaptative pour mettre en évidence la présence de ce trou noir ?

Les turbulences de l'atmosphère déforment l'onde lumineuse reçue par un télescope au sol : l'image est dégradée, les détails fins sont perdus (documents 2 et 3).

Or S2 appartient à un amas très dense : il faut des images très fines pour la séparer de ses voisines et repérer précisément ses positions successives.

L'optique adaptative corrige en temps réel l'effet des turbulences ; elle donne des images assez fines pour reconstituer l'orbite de S2, qui révèle le trou noir.

COMPRENDRE
Le trou noir n'émet aucune lumière : on ne l'observe pas, on le déduit du mouvement des étoiles proches. L'observation se fait en infrarouge, car les poussières arrêtent la lumière visible.

2.1 Expliquer pourquoi une étoile guide laser peut être nécessaire pour utiliser l'optique adaptative avec un télescope.

L'optique adaptative analyse la lumière d'une étoile de référence brillante, située dans le champ de l'objet observé, pour évaluer la perturbation due à l'atmosphère (document 2). Sa lumière traverse les mêmes couches d'air que celle de l'objet.

Il n'existe pas toujours d'étoile assez brillante à proximité de l'objet étudié.

Sans étoile brillante voisine, on crée une étoile de référence artificielle avec un laser, proche de l'objet observé : elle rend la correction possible.

2.2 Justifier le choix d'une source laser pour créer une étoile guide.

Le faisceau laser est très directif : il reste étroit jusqu'à 90 km d'altitude et n'éclaire qu'une petite zone de la mésosphère. L'étoile artificielle est alors quasi ponctuelle, comme une vraie étoile.

La lumière laser est monochromatique : sa longueur d'onde peut coïncider exactement avec celle d'une transition du sodium.

Son énergie est concentrée dans ce faisceau étroit : assez d'atomes sont excités pour que l'étoile guide soit brillante.

Le laser est choisi pour sa directivité, sa monochromaticité et la concentration de son énergie.

COMPRENDRE
Les propriétés du laser étaient au programme de Terminale S en 2014. Elles ne figurent plus au programme actuel de spécialité ; l'absorption et l'émission de photons par un atome y sont toujours.

2.3 Dans cette expérience, comment doit être choisie la longueur d'onde du laser ? Justifier.

Données utiles raie d'émission du sodium dans le visible : $\lambda = 589$ nm

Un atome n'absorbe un photon que si l'énergie de ce photon est égale à l'écart entre deux de ses niveaux d'énergie. Il absorbe donc les radiations qu'il est capable d'émettre.

Pour exciter les atomes de sodium, les photons du laser doivent avoir la longueur d'onde d'une raie du sodium.

La longueur d'onde du laser doit être $\lambda = 589$ nm, celle de la raie d'émission du sodium.

PIÈGE
Répondre « 589 nm » sans justification. Il faut relier ce choix à la quantification : seuls les photons d'énergie égale à un écart entre deux niveaux du sodium sont absorbés.

2.4 Interpréter la création de l'étoile guide à l'aide d'un diagramme de niveaux d'énergie. Quelle information quantitative cette expérience donne-t-elle sur ces niveaux ?

Données utiles $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J · s ; $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m · s^{-1} ; $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C ; $\lambda = 589$ nm (2.3)

Un atome de sodium absorbe un photon du laser et passe du niveau E_1 au niveau excité E_2. Il se désexcite ensuite en émettant un photon de même longueur d'onde : cette lumière émise à 90 km d'altitude constitue l'étoile guide.

L'expérience donne l'écart d'énergie entre les deux niveaux :

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{h\,c}{\lambda} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^{8}}{589 \times 10^{-9}} = 3{,}37 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

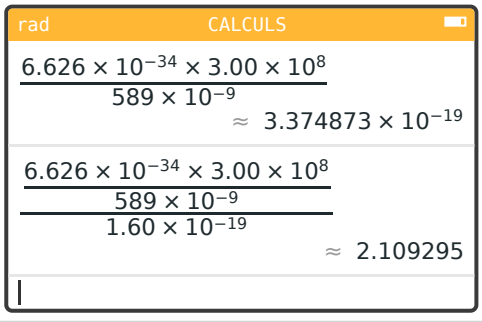
En électronvolts : $\Delta E = \dfrac{3{,}37 \times 10^{-19}}{1{,}60 \times 10^{-19}} = 2{,}11\ \text{eV}$

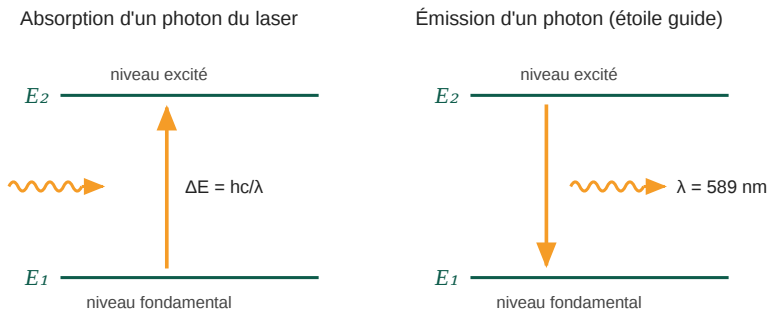
$$\Delta E = E_2 - E_1 = 3{,}37 \times 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}11\ \text{eV}$$

PIÈGE
Laisser λ en nanomètres dans le calcul. Sur le diagramme, la flèche d'absorption monte, la flèche d'émission descend.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme c et λ, données les moins précises. L'expérience donne seulement l'écart entre les deux niveaux, pas la valeur de chacun.

À LA CALCULATRICE





2.4 · Niveaux d'énergie de l'atome de sodium

3.1 Schématiser la trajectoire de l'étoile S2 et représenter, en plusieurs points, l'étoile, son vecteur vitesse et son vecteur accélération.

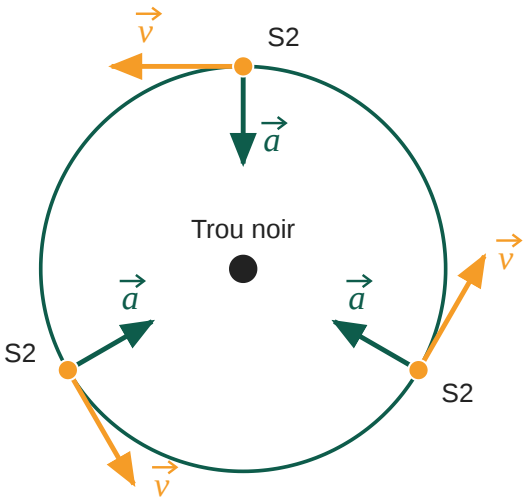
La trajectoire est un cercle de rayon r centré sur le trou noir.

En chaque point, le vecteur vitesse $\vec{v}$ est tangent au cercle, dans le sens du mouvement. Le vecteur accélération $\vec{a}$ est dirigé vers le centre du cercle, comme la force gravitationnelle exercée par le trou noir.

Voir le schéma : $\vec{v}$ tangent à la trajectoire, $\vec{a}$ centripète, tous deux de norme constante.

PIÈGE

Dessiner des flèches de longueurs différentes d'un point à l'autre : le mouvement est uniforme, v et a gardent la même valeur. Ne pas tracer $\vec{a}$ tangent ou vers l'extérieur.



3.1 · Orbite circulaire de S2 autour du trou noir

3.2 Montrer que la valeur de la vitesse de l'étoile S2 a pour expression $v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{r}}$.

Système {étoile S2}, de masse m constante ; référentiel lié au centre du trou noir, supposé galiléen ; seule force : l'attraction gravitationnelle du trou noir, $\vec{F} = \dfrac{G\,M\,m}{r^2}\,\vec{u}_N$, où $\vec{u}_N$ est le vecteur unitaire dirigé de S2 vers le trou noir.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \dfrac{G\,M}{r^2}\,\vec{u}_N$.

Dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire : $\vec{a} = \dfrac{v^2}{r}\,\vec{u}_N + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_T$.

Selon $\vec{u}_T$: $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, le mouvement est uniforme. Selon $\vec{u}_N$: $\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{G\,M}{r^2}$, soit $v^2 = \dfrac{G\,M}{r}$.

$v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{r}}$, expression attendue.

COMPRENDRE
La masse m de l'étoile se simplifie : la vitesse sur l'orbite ne dépend que de la masse M de l'astre attracteur et du rayon r.

MÉTHODE
Orbite circulaire : 1) système, référentiel, force ; 2) deuxième loi de Newton ; 3) accélération dans le repère de Frenet ; 4) identification. La composante tangentielle donne l'uniformité, la composante normale donne la vitesse.

3.3 En déduire l'expression de la période de révolution T de l'étoile.

Pendant une période T, l'étoile parcourt le périmètre $2\pi r$ de son orbite à la vitesse constante v :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{G\,M}}$$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{G\,M}}$

COMPRENDRE
En élevant au carré, $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M}$: on retrouve la troisième loi de Kepler, le rapport T^2/r^3 ne dépend que de l'astre attracteur.

3.4 Déterminer la valeur de la masse M du trou noir et la comparer à celle annoncée dans le document 1.

Données utiles $r = 132$ heures-lumière ; $T = 15{,}2$ ans ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $M_S = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg

D'après 3.3 : $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r^3}{G\,M}$, donc $M = \dfrac{4\pi^2 r^3}{G\,T^2}$.

Conversions : $r = 132 \times 3600 \times 3{,}00 \times 10^8 = 1{,}43 \times 10^{14}$ m ; $T = 15{,}2 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600 = 4{,}80 \times 10^8$ s.

$$M = \frac{4\pi^2 \times (1{,}43 \times 10^{14})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (4{,}80 \times 10^8)^2} = 7{,}45 \times 10^{36}\ \text{kg}$$

(valeur obtenue en gardant les valeurs non arrondies de r et T)

Comparaison : $\dfrac{M}{M_S} = \dfrac{7{,}45 \times 10^{36}}{2{,}0 \times 10^{30}} = 3{,}7 \times 10^6$

$M = 7{,}45 \times 10^{36}$ kg, soit 3,7 millions de masses solaires : valeur en accord avec les « 3 à 4 millions » du document 1.

PIÈGE

Oublier de convertir : r en mètres (1 heure-lumière $= c \times 3600$ s) et T en secondes. Avec les valeurs arrondies de r et T, on trouve $7{,}5 \times 10^{36}$ kg : garder les valeurs exactes en mémoire.

COMPRENDRE

Le rapport M/M_S est donné avec deux chiffres significatifs, comme M_S. L'orbite réelle est une ellipse : le cercle n'est qu'un modèle, suffisant pour un ordre de grandeur.

À LA CALCULATRICE

