Voyage interplanétaire

Bac S 2014 Métropole (ancien programme) · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 50 min**

1 Indiquer les différentes phases du voyage de la mission MSL.

D'après le document 1, le voyage comporte trois phases :

- le départ : le vaisseau quitte la Terre et se libère de son attraction ;
- le transfert : soumis à l'attraction du Soleil, il parcourt l'orbite de Hohmann du périhélie P jusqu'à l'aphélie A ;
- l'arrivée : près de Mars, l'attraction de cette planète devient prépondérante et Curiosity se pose.

Trois phases : échappement à la Terre, transfert sur l'orbite de Hohmann, capture par Mars.

MÉTHODE
Question d'extraction : chaque phase est associée à l'astre dont l'attraction domine (Terre, puis Soleil, puis Mars). Citer le document suffit, sans calcul.

2 Sur l'annexe, repasser en couleur le chemin suivi par MSL et indiquer R_1 et R_2. Montrer que le demi-grand axe de l'orbite de Hohmann vaut $a = 1{,}89 \times 10^8$ km.

Données utiles $R_1 = 1{,}50 \times 10^8$ km ; $R_2 = 2{,}28 \times 10^8$ km

MSL part de P, sur l'orbite terrestre, et rejoint A, sur l'orbite de Mars : il décrit la moitié de l'ellipse (voir l'annexe).

Les points A, S et P sont alignés, avec $SP = R_1$ et $SA = R_2$. Le grand axe de l'ellipse vérifie donc :

$$AP = 2a = R_1 + R_2 \quad \text{soit} \quad a = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$a = \frac{1{,}50 \times 10^8 + 2{,}28 \times 10^8}{2} = 1{,}89 \times 10^8 \text{ km}$$

$a = \dfrac{R_1 + R_2}{2} = 1{,}89 \times 10^8$ km : c'est la valeur attendue.

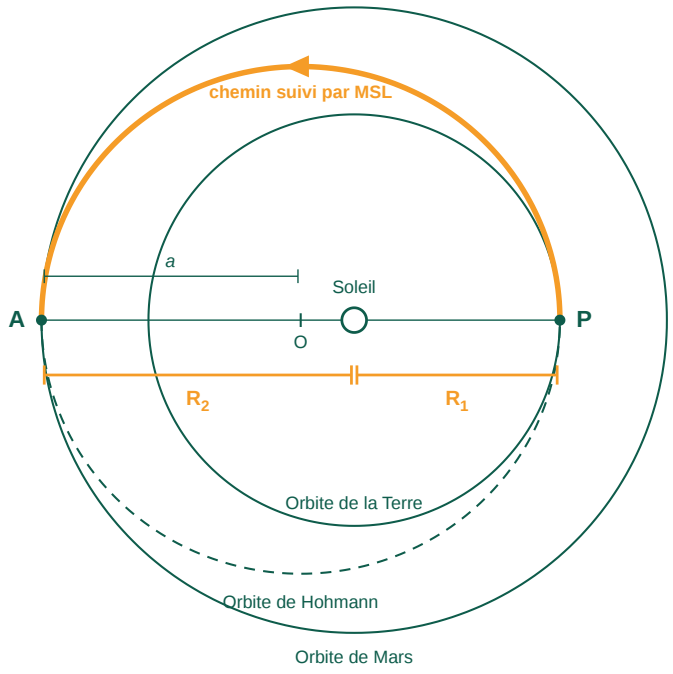
PIÈGE
Le Soleil n'est pas au centre O de l'ellipse : il en occupe un foyer. Les distances R_1 et R_2 se mesurent depuis S, pas depuis O.

COMPRENDRE
Les données ont trois chiffres significatifs : les résultats de l'exercice en gardent trois.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{1.50 \times 10^8 + 2.28 \times 10^8}{2} \approx 1.89 \times 10^8$$



2 · Annexe complétée : demi-ellipse parcourue de P vers A, distances R_1 et R_2

3.1 Exprimer la durée Δt du voyage de Curiosity en fonction de a, G et M_S, puis vérifier l'homogénéité de la relation par une analyse dimensionnelle.

Données utiles $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_S}$; G en $\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$

Le vaisseau ne parcourt que la moitié de l'ellipse, de P à A. Les deux moitiés étant symétriques par rapport au grand axe, la durée du trajet est une demi-période : $\Delta t = \dfrac{T}{2}$.

La troisième loi de Kepler donne $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM_S}}$, d'où :

$$\Delta t = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_S}}$$

Homogénéité : a^3 s'exprime en $\mathrm{m^3}$ et le produit GM_S en $\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2} \times kg = m^3 \cdot s^{-2}}$.

Le quotient $\dfrac{a^3}{GM_S}$ est donc en $\dfrac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{m^3 \cdot s^{-2}}} = \mathrm{s^2}$; sa racine carrée est en secondes et π est sans unité.

$\Delta t = \pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM_S}}$, expression homogène à une durée.

PIÈGE
Garder $\Delta t = T$: le vaisseau s'arrête en A, il ne boucle pas l'ellipse. Oublier ce facteur 2 double la durée du voyage.

COMPRENDRE
Avec les dimensions : $[G] = L^3M^{-1}T^{-2}$, donc $\left[\dfrac{a^3}{GM_S}\right] = \dfrac{L^3}{L^3T^{-2}} = T^2$. Raisonner sur les unités SI revient au même.

3.2 Calculer la durée Δt. Commenter le résultat obtenu par rapport à la durée de la mission.

Données utiles $a = 1{,}89 \times 10^8$ km (Q2) ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$; $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg ; départ le 26 novembre 2011, arrivée le 6 août 2012

Avec $a = 1{,}89 \times 10^{11}$ m :

$$\Delta t = \pi\sqrt{\frac{(1{,}89 \times 10^{11})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30}}} = 2{,}24 \times 10^7 \text{ s}$$

En jours : $\Delta t = \dfrac{2{,}24 \times 10^7}{24 \times 3600} = 259$ j.

Durée réelle, du 26 novembre 2011 au 6 août 2012 (février 2012 compte 29 jours) :

$4 + 31 + 31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 6 = 254$ j.

Écart relatif : $\dfrac{259 - 254}{254} \approx 2\,\%$. Les deux durées sont très proches : le modèle de l'orbite de Hohmann, avec des orbites planétaires circulaires, décrit correctement le voyage.

$\Delta t = 2{,}24 \times 10^7$ s, soit 259 jours, en accord à 2 % près avec les 254 jours de la mission.

PIÈGE
Laisser a en kilomètres : G est en unités SI, il faut $a = 1{,}89 \times 10^{11}$ m. L'erreur divise la durée par $1000^{3/2}$, soit environ 30 000.

COMPRENDRE
Le petit écart vient du modèle : orbites réelles légèrement elliptiques, phases de départ et d'arrivée où la Terre puis Mars attirent le vaisseau, corrections de trajectoire en cours de route.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\pi \times \sqrt{\dfrac{(1.89 \times 10^{11})^3}{6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30}}} \approx 2.240542 \times 10^7$

$\dfrac{22\,405\,421.78}{24 \times 3600} \approx 259.322$

$4 + 31 + 31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 6 = 254$

$\dfrac{259 - 254}{254} \approx 0.01968504$

4 Déterminer la valeur de l'angle α qui repère la position de Mars au départ, condition nécessaire à la réussite de la mission.

Données utiles période de Mars $T_M = 1{,}88$ an ; $\Delta t = 259$ j (Q3.2) ; $\beta = (\overrightarrow{SM_1}, \overrightarrow{SM_2})$

Pour que le rendez-vous ait lieu, Mars doit aller de M_1 à M_2 pendant que le vaisseau va de P à A, c'est-à-dire pendant la durée Δt.

Le mouvement de Mars est circulaire uniforme : l'angle balayé est proportionnel à la durée, avec 360° pour une période T_M.

$T_M = 1{,}88 \times 365{,}25 = 687$ j, donc :

$$\beta = 360 \times \frac{\Delta t}{T_M} = 360 \times \frac{259}{687} = 136^\circ$$

Le point de rendez-vous M_2 est l'aphélie A, diamétralement opposé au point de départ T_1 (périhélie P) par rapport au Soleil. D'après le document 2 : $\alpha + \beta = 180^\circ$.

$\alpha = 180 - \beta = 180 - 136 = 44^\circ$

$\alpha = 44^\circ$: au lancement, Mars doit être en avance de 44° sur la Terre.

PIÈGE
Exprimer Δt et T_M dans des unités différentes (secondes et années). Le rapport $\dfrac{\Delta t}{T_M}$ n'a de sens qu'avec deux durées dans la même unité.

COMPRENDRE
Avec la durée réelle de 254 jours, on trouve $\beta = 133^\circ$ et $\alpha = 47^\circ$. Cette configuration ne revient qu'environ tous les 26 mois : c'est la fenêtre de tir.

MÉTHODE
Question ouverte : annoncer la démarche avant de calculer. Ici, 1) Mars parcourt β pendant Δt ; 2) proportionnalité angle-durée ; 3) relation géométrique entre α et β lue sur la figure.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1.88 \times 365.25 \approx 686.67$

$\dfrac{360 \times 259}{687} \approx 135.7205$

$180 - 136 = 44$