Quelle teneur en cuivre dans une pièce de 5 centimes d'euro ?

Bac S 2014 Antilles-Guyane rattrapage (ancien programme) · Exercice 1 **5 points** **Durée conseillée 50 min**

1.1 Déterminer, en argumentant, les couleurs attendues pour une solution d'ions cuivre (II) et pour une solution d'ions fer (III). Pourquoi travaille-t-on à 800 nm ?

Données utiles document 1 : spectres d'absorption des deux solutions et tableau des couleurs complémentaires

Une solution a la couleur complémentaire de celle des radiations qu'elle absorbe.

- Ions $\mathrm{Cu^{2+}}$: l'absorbance est forte entre 650 et 830 nm environ, donc dans le rouge (647-850 nm). La solution est **bleu-vert**.
- Ions $\mathrm{Fe^{3+}}$: l'absorbance n'est notable qu'en dessous de 430 nm environ, donc dans le violet (400-424 nm). La solution est **jaune-vert**.

À 800 nm, l'absorbance des ions $\mathrm{Fe^{3+}}$ est nulle alors que celle des ions $\mathrm{Cu^{2+}}$ est proche de son maximum.

À 800 nm, seuls les ions $\mathrm{Cu^{2+}}$ absorbent : l'absorbance de S_2 ne dépend que de leur concentration, et la mesure est la plus sensible.

PIÈGE
Donner la couleur absorbée au lieu de la couleur perçue : une solution qui absorbe le rouge n'est pas rouge, elle est bleu-vert.

COMPRENDRE
Les ions $\mathrm{Fe^{3+}}$ absorbent encore plus fortement en dessous de 400 nm, dans l'ultraviolet : cela ne change rien à la couleur observée, puisque l'œil n'y est pas sensible.

1.2 Montrer, à l'aide du document 2 et en complétant l'annexe, que la loi de Beer-Lambert est vérifiée pour les solutions d'ions cuivre (II).

Données utiles document 2 : absorbance A à 800 nm de six solutions de concentration c connue

Loi de Beer-Lambert : à longueur d'onde fixée, l'absorbance est proportionnelle à la concentration de l'espèce absorbante, $A = k\,c$.

On place sur l'annexe les six points $(c\,;\ A)$ du document 2. Ils sont alignés, aux écarts de mesure près, sur une droite qui passe par l'origine : A est donc proportionnelle à c.

Coefficient directeur, avec le point $(50\ \mathrm{mmol\cdot L^{-1}}\,;\ 0{,}69)$ de la droite tracée :

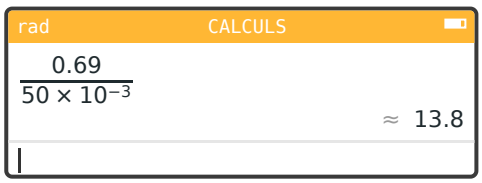
$$k = \frac{0{,}69}{50 \times 10^{-3}} = 13{,}8\ \mathrm{L\cdot mol^{-1}}$$

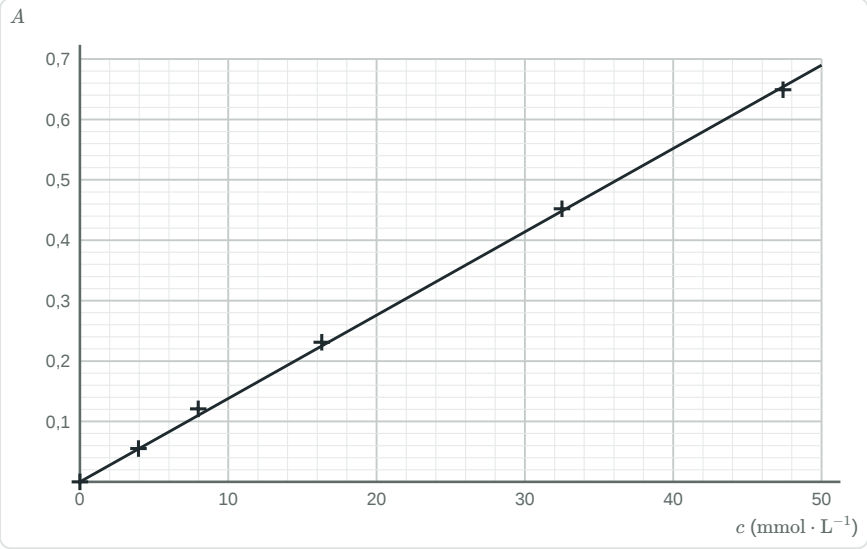
Les points sont alignés avec l'origine : $A = k\,c$ avec $k \approx 13{,}8\ \mathrm{L\cdot mol^{-1}}$, la loi de Beer-Lambert est vérifiée.

PIÈGE
Se contenter de « les points sont alignés ». La proportionnalité exige deux arguments : une droite, et qui passe par l'origine.

MÉTHODE
Tracer la droite à la règle, en partant de l'origine et en passant au plus près de tous les points, sans les relier un à un. Le coefficient directeur se calcule avec un point de la droite, pas avec un point du tableau.

À LA CALCULATRICE





1.2 · Annexe complétée : absorbance à 800 nm en fonction de la concentration en ions cuivre (II)

2.1 Déterminer la masse de cuivre contenue dans la pièce de 5 centimes d'euro.

Données utiles $A = 0{,}575$ pour la solution S_2 ; $V = 100$ mL ; $M(\mathrm{Cu}) = 63{,}5\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$; $k = 13{,}8\ \mathrm{L \cdot mol^{-1}}$ (1.2)

Sur la droite d'étalonnage, l'ordonnée $A = 0{,}575$ correspond à l'abscisse $c \approx 42\ \mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$. Par le calcul :

$$[\mathrm{Cu^{2+}}] = \frac{A}{k} = \frac{0{,}575}{13{,}8} = 4{,}17 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$$

D'après l'équation de la réaction, tout le cuivre de la pièce est transformé en ions $\mathrm{Cu^{2+}}$, qui se retrouvent tous dans les 100 mL de S_2 : $n(\mathrm{Cu}) = n(\mathrm{Cu^{2+}}) = [\mathrm{Cu^{2+}}]\,V$.

$$m(\mathrm{Cu}) = [\mathrm{Cu^{2+}}]\,V\,M(\mathrm{Cu}) = 4{,}17 \times 10^{-2} \times 0{,}100 \times 63{,}5 = 0{,}265\ \mathrm{g}$$

$m(\mathrm{Cu}) \approx 0{,}265$ g, soit environ 265 mg

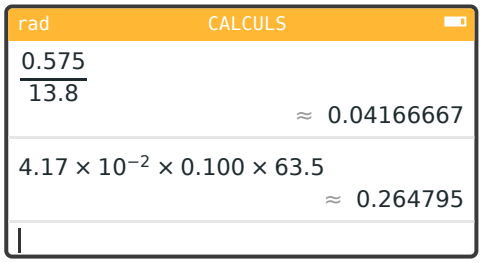
PIÈGE

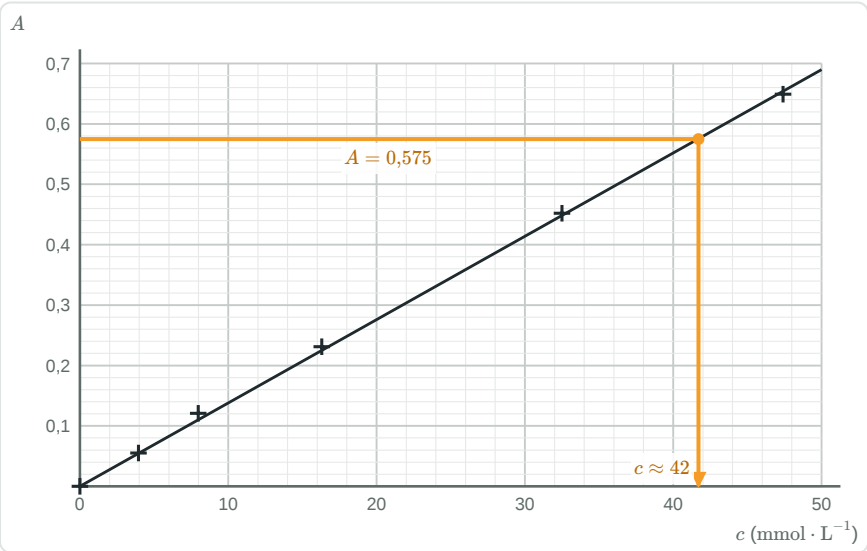
Prendre 20 mL, volume d'acide versé, au lieu de 100 mL : la concentration lue sur la droite est celle de S_2, préparée dans la fiole jaugée.

COMPRENDRE

Le résultat repose sur une droite tracée à la main : selon le tracé, on trouve de 0,26 à 0,27 g. Le troisième chiffre n'est donc pas sûr, d'où l'étude d'incertitude de la partie 3.

À LA CALCULATRICE





2.1 · Lecture de la concentration de S_2 sur la droite d'étalonnage

2.2 En déduire la teneur (pourcentage massique) en cuivre dans la pièce.

Données utiles $m(\text{Cu}) = 0{,}265$ g (2.1) ; $m_{\text{pièce}} = 3{,}93$ g

La teneur est le rapport de la masse de cuivre à la masse de la pièce :

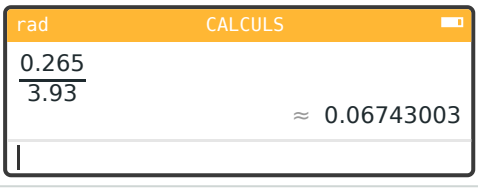
$$t = \frac{m(\text{Cu})}{m_{\text{pièce}}} = \frac{0{,}265}{3{,}93} = 0{,}067$$

$t \approx 6{,}7\ \%$: la pièce contient environ 6,7 % de cuivre en masse.

PIÈGE
Diviser des milligrammes par des grammes : les deux masses doivent être dans la même unité avant de faire le rapport.

COMPRENDRE
La pièce paraît entièrement en cuivre, mais ce métal ne forme qu'une mince couche en surface : l'essentiel de la masse est celle du centre en acier.

À LA CALCULATRICE



3.1 Déterminer, à partir des dix valeurs trouvées par les élèves, l'incertitude élargie (niveau de confiance de 95 %) sur la mesure de la masse de cuivre dans une pièce.

Données utiles masses en mg : 260 ; 270 ; 265 ; 263 ; 264 ; 265 ; 262 ; 261 ; 269 ; 267 ; $n = 10$; $k = 2$ pour 95 % (document 3)

Avec le mode statistique de la calculatrice : moyenne $\overline{m} = 264{,}6$ mg et écart-type expérimental $\sigma_{n-1} = 3{,}31$ mg.

Incertitude-type sur la moyenne : $u(\overline{m}) = \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Incertitude élargie, avec $k = 2$ pour un niveau de confiance de 95 % :

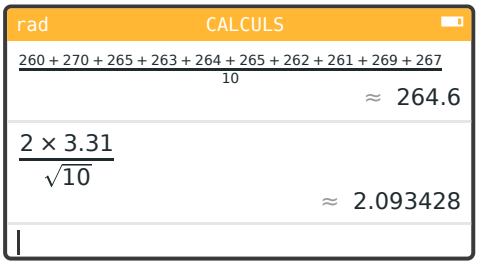
$$U(\overline{m}) = k\,\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = 2 \times \frac{3{,}31}{\sqrt{10}} = 2{,}1 \text{ mg}$$

$U(\overline{m}) \approx 2$ mg (un seul chiffre significatif)

PIÈGE
Choisir sur la calculatrice l'écart-type σ_n (3,14 mg) au lieu de l'écart-type expérimental σ_{n-1} (3,31 mg), ou oublier de diviser par $\sqrt{n}$.

COMPRENDRE
Une incertitude s'écrit avec un seul chiffre significatif, parfois deux : dix mesures ne permettent pas de la connaître plus finement.

À LA CALCULATRICE



3.2 En déduire l'intervalle dans lequel devrait se situer le résultat du mesurage de la masse de cuivre, avec un niveau de confiance de 95 %.

Données utiles $\overline{m} = 264{,}6$ mg et $U(\overline{m}) = 2$ mg (3.1)

L'incertitude porte sur le milligramme : la moyenne est arrondie au milligramme, $\overline{m} = 265$ mg.

$$m = \overline{m} \pm U(\overline{m}) = (265 \pm 2) \text{ mg}$$

$263 \text{ mg} \leqslant m \leqslant 267 \text{ mg}$ avec un niveau de confiance de 95 %

COMPRENDRE
La masse trouvée à la question 2.1 (0,265 g) se situe dans cet intervalle : la mesure faite sur la pièce est cohérente avec celles des dix groupes.

MÉTHODE
Écrire un résultat : arrondir d'abord l'incertitude, puis arrondir la valeur au même rang décimal. Ici l'incertitude vaut 2 mg, donc la masse s'écrit au milligramme près.