Un peu de balistique

Bac S 2014 Amérique du Sud (ancien programme) · Exercice 1 **8 points** **Durée conseillée 1 h 20**

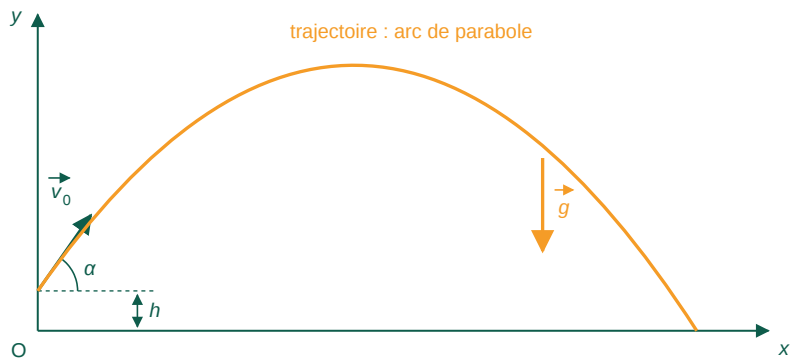
1.1 Représenter le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ sur la figure 1 de l'annexe et tracer qualitativement l'allure de la trajectoire de la fusée éclairante.

Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas. Il est uniforme : on le trace identique en n'importe quel point.

La trajectoire est un arc de parabole qui part du point de coordonnées $(0\,;h)$, est tangent à $\vec{v}_0$ en ce point, passe par un sommet puis redescend jusqu'au sol ($y=0$).

Voir la figure 1 complétée : $\vec{g}$ vertical vers le bas, trajectoire parabolique tangente à $\vec{v}_0$ au départ.

PIÈGE
Faire partir la courbe de l'origine O. La fusée quitte le pistolet à la hauteur h, et la courbe doit être tangente à $\vec{v}_0$ en ce point.



1.1 · Figure 1 de l'annexe complétée : champ de pesanteur et allure de la trajectoire

1.2 En utilisant une loi de Newton que l'on énoncera, déterminer les coordonnées $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération de la fusée éclairante.

Système {fusée éclairante}, de masse m_f constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Deuxième loi de Newton : dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système de masse constante est égale au produit de sa masse par l'accélération de son centre d'inertie : $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = m_f\,\vec{a}$.

Les actions de l'air sont négligées : la seule force est le poids $\overrightarrow{P} = m_f\,\vec{g}$ (chute libre).

$m_f\,\vec{g} = m_f\,\vec{a}$ donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Comme $\vec{g}$ est vertical et de sens opposé à $\vec{j}$:

$a_x(t) = 0$ et $a_y(t) = -g$

PIÈGE
Écrire $a_y = g$. L'axe Oy est orienté vers le haut et $\vec{g}$ vers le bas : la coordonnée est négative.

COMPRENDRE
L'ancien programme énonçait cette loi sous la forme $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$, qui n'est plus au programme actuel de spécialité. À masse constante, elle redonne $m\,\vec{a}$.

1.3 En déduire les coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse, puis montrer que $x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$ et $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + h$.

$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de a_x et a_y.

$v_x(t) = C_1$ et $v_y(t) = -g\,t + C_2$

À $t = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v_0}$ a pour coordonnées $v_0\cos\alpha$ et $v_0\sin\alpha$, donc $C_1 = v_0\cos\alpha$ et $C_2 = v_0\sin\alpha$.

$$v_x(t) = v_0\cos\alpha \qquad v_y(t) = -g\,t + v_0\sin\alpha$$

$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$: on cherche à nouveau les primitives.

$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t + C_3$ et $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + C_4$

À $t = 0$, la fusée est à la sortie du pistolet : $x(0) = 0$ et $y(0) = h$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = h$.

$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$ et $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + h$: ce sont les équations attendues.

PIÈGE
Oublier la constante h dans $y(t)$: la fusée ne part pas de l'origine du repère.

MÉTHODE
Deux intégrations successives. À chacune, écrire la constante puis la déterminer avec la condition initiale correspondante : vitesse à $t = 0$ d'abord, position à $t = 0$ ensuite.

1.4 Déterminer la valeur de la durée du vol de la fusée éclairante.

Données utiles $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $v_0 = 50\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $\alpha = 55^\circ$; $h = 1{,}8\ \mathrm{m}$

Le vol s'achève quand la fusée touche le sol : $y(t_{\text{vol}}) = 0$, soit

$$-\frac{g}{2}t_{\text{vol}}^2 + v_0\sin(\alpha)\,t_{\text{vol}} + h = 0$$

Discriminant : $\Delta = (v_0\sin\alpha)^2 + 2\,g\,h = (50\times\sin 55^\circ)^2 + 2\times 9{,}8\times 1{,}8 = 1{,}7\times 10^3\ \mathrm{m^2\cdot s^{-2}}$

$\Delta > 0$: il y a deux solutions, $\frac{v_0\sin\alpha - \sqrt{\Delta}}{g} = -0{,}044$ s et $\frac{v_0\sin\alpha + \sqrt{\Delta}}{g}$. Seule la solution positive a un sens physique :

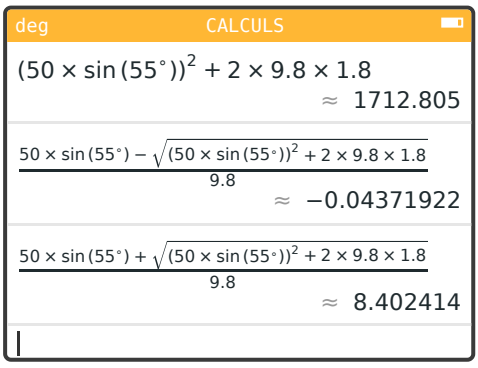
$$t_{\text{vol}} = \frac{50\times\sin 55^\circ + \sqrt{(50\times\sin 55^\circ)^2 + 2\times 9{,}8\times 1{,}8}}{9{,}8}$$

$t_{\text{vol}} = 8{,}4$ s

PIÈGE
Calculatrice en radians : $\sin 55$ donnerait une valeur négative. Vérifier le mode degrés avant tout calcul.

COMPRENDRE
Les données (g, v_0, α, h) ont deux chiffres significatifs : le résultat aussi. On garde les valeurs exactes dans la calculatrice et on n'arrondit qu'à la fin.

À LA CALCULATRICE



1.5 Calculer l'altitude à partir de laquelle la fusée commence à éclairer puis l'altitude à laquelle elle s'arrête. Ces valeurs paraissent-elles adaptées au but recherché ?

Données utiles allumage $1{,}0$ s après le départ ; éclairage pendant 6 s environ ; $t_{\text{vol}} = 8{,}4$ s (1.4)

La fusée s'allume à $t_1 = 1{,}0$ s :

$$y(t_1) = -\frac{9{,}8}{2} \times 1{,}0^2 + 50 \times \sin(55^\circ) \times 1{,}0 + 1{,}8 = 38 \text{ m}$$

Elle s'éteint à $t_2 = 1{,}0 + 6 = 7$ s :

$$y(t_2) = -\frac{9{,}8}{2} \times 7^2 + 50 \times \sin(55^\circ) \times 7 + 1{,}8 = 48 \text{ m}$$

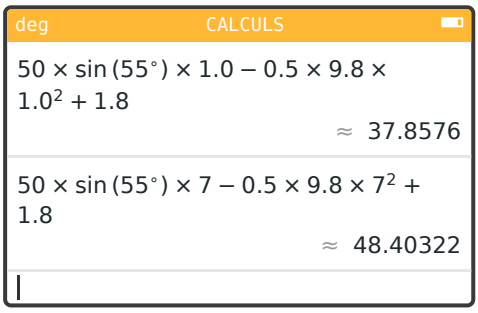
La fusée éclaire donc toujours à plusieurs dizaines de mètres du sol : elle est visible de loin et éclaire une zone étendue. De plus $t_2 < t_{\text{vol}}$: elle s'éteint avant de retomber au sol.

Début de l'éclairage à 38 m, fin à 48 m environ : ces altitudes sont adaptées à l'éclairage et à la signalisation.

PIÈGE
Prendre $t = 6$ s pour la fin de l'éclairage. Les 6 s se comptent à partir de l'allumage, donc $t_2 = 7$ s après le tir.

COMPRENDRE
La durée « 6 secondes environ » est peu précise : l'altitude de fin vaut une cinquantaine de mètres. Entre les deux instants, la fusée passe par le sommet de sa trajectoire.

À LA CALCULATRICE



2.1 Exprimer la quantité de mouvement totale $\vec{p}_0$ du système {fusée - pistolet} avant que la fusée ne quitte le pistolet, puis montrer qu'elle est égale au vecteur nul.

La quantité de mouvement du système est la somme de celles du pistolet et de la fusée :

$$\vec{p}_0 = m_p\,\vec{v}_{\text{pistolet}} + m_f\,\vec{v}_{\text{fusée}}$$

Avant le tir, la fusée est dans le pistolet et les deux ont la même vitesse $\vec{v}$: $\vec{p}_0 = (m_p + m_f)\,\vec{v}$.

Le pistolet est immobile dans le référentiel terrestre : $\vec{v} = \vec{0}$.

$$\vec{p}_0 = (m_p + m_f)\,\vec{v} = \vec{0}$$

COMPRENDRE
La quantité de mouvement $\vec{p} = m\,\vec{v}$ et sa conservation figuraient au programme de Terminale S ; elles ne sont plus au programme actuel de spécialité.

2.2.1 Que peut-on dire de la quantité de mouvement totale du système {fusée - pistolet} si on le considère comme isolé au cours de l'éjection de la fusée ?

Dans un référentiel galiléen, le vecteur quantité de mouvement d'un système isolé se conserve.

$\vec{p}_{\text{après}} = \vec{p}_0 = \vec{0}$: la quantité de mouvement totale reste nulle pendant et après l'éjection.

COMPRENDRE
Système isolé : $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$, donc $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$. La poussée des gaz est une action intérieure au système : elle ne modifie pas $\vec{p}$.

2.2.2 En déduire l'expression vectorielle de la vitesse de recul $\vec{v}_p$ du pistolet juste après l'éjection, en fonction de m_p, m_f et $\vec{v}_0$.

Juste après l'éjection, la fusée a la vitesse $\vec{v}_0$ et le pistolet la vitesse $\vec{v}_p$:

$\vec{p}_{\text{après}} = m_p\,\vec{v}_p + m_f\,\vec{v}_0$

Conservation : $m_p\,\vec{v}_p + m_f\,\vec{v}_0 = \vec{0}$

$$\vec{v}_p = -\frac{m_f}{m_p}\,\vec{v}_0$$

COMPRENDRE
Le signe « $-$ » traduit le recul : le pistolet part dans le sens opposé à celui de la fusée, avec une vitesse d'autant plus faible qu'il est lourd devant elle.

2.2.3 La valeur réelle de la vitesse de recul est beaucoup plus faible que celle obtenue à la question précédente. Pourquoi ? Justifier.

Données utiles $m_f = 58$ g ; $m_p = 0{,}98$ kg ; $v_0 = 50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Valeur prévue par le modèle : $v_p = \dfrac{m_f}{m_p}\,v_0 = \dfrac{0{,}058}{0{,}98} \times 50 = 3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

En réalité le système {fusée - pistolet} n'est pas isolé : le tireur tient fermement l'arme et sa main exerce sur le pistolet une force extérieure qui s'oppose au recul. La quantité de mouvement du système ne se conserve donc pas.

Le système n'est pas isolé (action de la main du tireur) : la vitesse de recul réelle est très inférieure à $3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

PIÈGE
Laisser m_f en grammes avec m_p en kilogrammes : le rapport des masses exige la même unité.

COMPRENDRE
Autre lecture : la main et le bras reculent avec l'arme. La masse à mettre en mouvement est bien plus grande que m_p, donc la vitesse plus faible.

À LA CALCULATRICE

