Les tirs au but

Bac S 2015 Antilles-Guyane (ancien programme) · Exercice 1 **6 points** **Durée conseillée 1 h**

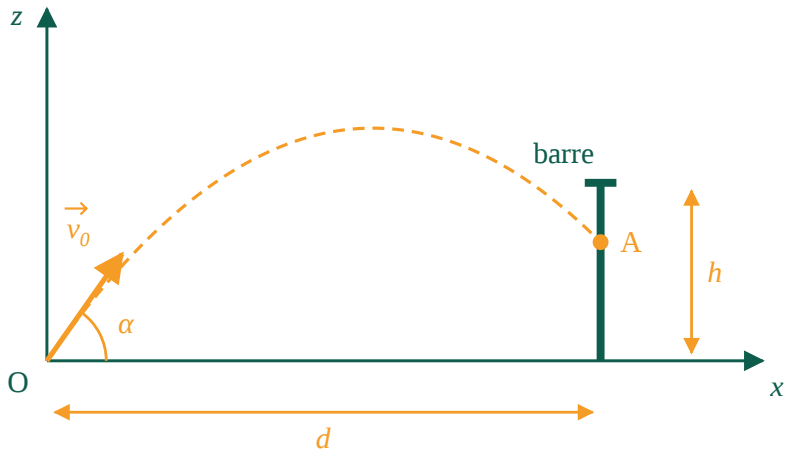
1.1 Tracer un repère orthonormé (Ox, Oz) et y représenter la situation du pénalty, en faisant apparaître $\vec{v}_0$, l'angle α, la hauteur h des buts et la distance d du point de pénalty à la ligne de but.

L'axe (Ox) est horizontal, au niveau du sol, dirigé vers le but ; l'axe (Oz) est vertical, dirigé vers le haut. Le ballon part de O.

Le vecteur $\vec{v}_0$ part de O et fait l'angle α avec (Ox). La ligne de but est à l'abscisse $x = d$; la barre transversale est à la hauteur $z = h$.

Schéma ci-dessous : $\vec{v}_0$ et α en O, d mesurée sur (Ox), h mesurée sur la verticale du but.

PIÈGE
Placer α entre $\vec{v}_0$ et la verticale. L'énoncé le définit par rapport à l'horizontale, donc entre (Ox) et $\vec{v}_0$.



1.1 · Situation du pénalty dans le repère (Ox, Oz), sans souci d'échelle

1.2 A est le point où le ballon franchit la ligne de but. Quelles conditions doivent vérifier ses coordonnées $(x_A\,;\,z_A)$ pour que le pénalty soit réussi ?

Données utiles $d = 11{,}0$ m ; $h = 2{,}44$ m

Le point A est sur la ligne de but : $x_A = d = 11{,}0$ m.

Le ballon doit alors se trouver au-dessus du sol et sous la barre transversale : $0 < z_A < h$.

$x_A = d = 11{,}0$ m et $0 < z_A < h = 2{,}44$ m

COMPRENDRE
Le tir est dirigé vers le centre du but : le ballon passe forcément entre les montants. Seule la hauteur reste à contrôler.

2.1 Établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_G$ du centre d'inertie du ballon.

Système : {ballon}, de masse m constante. Référentiel : terrestre, supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ seulement (frottements de l'air et poussée d'Archimède négligés).

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}_G$.

$\vec{a}_G = \vec{g}$: accélération verticale, vers le bas, de valeur g.

COMPRENDRE
La masse se simplifie : sans frottement, le mouvement ne dépend pas de la masse du ballon.

MÉTHODE
Toujours quatre étapes : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton. Chacune rapporte des points, même si le résultat est connu d'avance.

2.2 Établir les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement de G, puis montrer que la trajectoire a pour équation $z(x) = -\dfrac{g\,x^2}{2\,v_0^2\,(\cos\alpha)^2} + \tan\alpha \cdot x$.

Données utiles $\vec{a}_G = \vec{g}$ (2.1) ; à $t = 0$: G en O, vitesse $\vec{v}_0$

Dans le repère (Ox, Oz) : $a_x = 0$ et $a_z = -g$.

Comme $\vec{a}_G = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_G}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives : $v_x = C_1$ et $v_z = -g\,t + C_2$.

À $t = 0$, $\vec{v}_G = \vec{v}_0$ de coordonnées $(v_0\cos\alpha\,;\,v_0\sin\alpha)$, donc $C_1 = v_0\cos\alpha$ et $C_2 = v_0\sin\alpha$:

$$v_x(t) = v_0\cos\alpha \qquad v_z(t) = -g\,t + v_0\sin\alpha$$

Comme $\vec{v}_G = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on cherche de nouveau les primitives : $x = v_0\cos\alpha \cdot t + C_3$ et $z = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin\alpha \cdot t + C_4$.

À $t = 0$, G est en O : $C_3 = 0$ et $C_4 = 0$. Les équations horaires sont :

$$x(t) = v_0\cos\alpha \cdot t \qquad z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin\alpha \cdot t$$

Trajectoire : de $x(t)$ on tire $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$, que l'on reporte dans $z(t)$:

$$z(x) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

Or $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$, d'où :

$z(x) = -\dfrac{g\,x^2}{2\,v_0^2\,(\cos\alpha)^2} + \tan\alpha \cdot x$: c'est l'expression attendue.

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de a_z (l'axe Oz est dirigé vers le haut, $\vec{g}$ vers le bas), ou échanger $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ dans les coordonnées de $\vec{v}_0$.

MÉTHODE
Deux primitives successives, et après chacune une constante fixée par la condition initiale correspondante : la vitesse initiale d'abord, la position initiale ensuite.

2.3 En exploitant les données et les documents, déterminer si le pénalty décrit en début d'exercice est réussi.

Données utiles $v_0 = 11{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $\alpha = 55^\circ$; $g = 9{,}81\ \mathrm{N\cdot kg^{-1}}$; $x_A = d = 11{,}0\ \mathrm{m}$; $h = 2{,}44\ \mathrm{m}$

On calcule l'altitude du ballon sur la ligne de but, en $x_A = 11{,}0$ m, avec l'équation de la trajectoire :

$$z_A = -\frac{g\,x_A^2}{2\,v_0^2\,(\cos\alpha)^2} + \tan\alpha \cdot x_A$$

$$z_A = -\frac{9{,}81 \times 11{,}0^2}{2 \times 11{,}5^2 \times (\cos 55^\circ)^2} + \tan 55^\circ \times 11{,}0 = 2{,}1\ \mathrm{m}$$

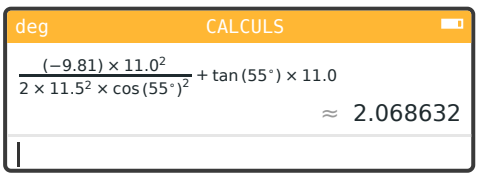
On a bien $0 < 2{,}1\ \mathrm{m} < 2{,}44\ \mathrm{m}$: le ballon passe sous la barre transversale.

$z_A = 2{,}1$ m, donc $0 < z_A < h$: le pénalty est réussi.

PIÈGE
Calculatrice en radians : $\cos 55$ et $\tan 55$ donnent alors un résultat absurde. Vérifier le mode degré avant le calcul, et mettre $\cos 55^\circ$ au carré, pas l'angle.

COMPRENDRE
L'angle $\alpha = 55^\circ$ n'a que deux chiffres significatifs : le résultat s'écrit avec deux chiffres, $2{,}1$ m. La marge sous la barre est d'environ 0,3 m.

À LA CALCULATRICE



3.1 Rappeler les expressions de E_c, E_{pp} et E_m (axe vertical ascendant, E_{pp} nulle à l'origine), puis associer à chaque courbe du document 1 la forme d'énergie correspondante.

Données utiles $m = 0{,}620$ kg ; $v_0 = 11{,}5$ m · s^{-1}

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \qquad E_{pp} = m g z \qquad E_m = E_c + E_{pp}$$

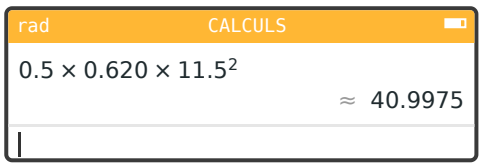
- **Courbe 3 : E_{pp}.** En O, $z = 0$ donc $E_{pp} = 0$: c'est la seule courbe qui part de zéro. Elle augmente quand le ballon monte, puis diminue quand il redescend.
- **Courbe 1 : E_m.** Les frottements sont négligés : l'énergie mécanique se conserve, sa courbe est une droite horizontale.
- **Courbe 2 : E_c.** La vitesse diminue pendant la montée et augmente pendant la descente. Au départ, $E_c = \frac{1}{2} \times 0{,}620 \times 11{,}5^2 = 41{,}0$ J, valeur lue en $x = 0$.

Courbe 1 : E_m ; courbe 2 : E_c ; courbe 3 : E_{pp}.

PIÈGE
Laisser la masse en grammes : $m = 620$ g $= 0{,}620$ kg, sinon les énergies ne sont pas en joules.

COMPRENDRE
Au sommet de la trajectoire, E_c n'est pas nulle (environ 13 J) : il reste la vitesse horizontale $v_0 \cos\alpha$, qui ne change jamais.

À LA CALCULATRICE



3.2 À l'aide du document 1, déterminer les valeurs de la hauteur h_A et de la vitesse v_A lorsque le ballon franchit la ligne de but.

Données utiles $m = 0{,}620$ kg ; $g = 9{,}81$ N · kg^{-1} ; $x_A = 11{,}0$ m

Sur le document 1, à l'abscisse $x_A = 11{,}0$ m, on lit : $E_{pp} \approx 13$ J (courbe 3) et $E_c \approx 28$ J (courbe 2).

Hauteur : $E_{pp} = m g h_A$ donc $h_A = \dfrac{E_{pp}}{m g} = \dfrac{13}{0{,}620 \times 9{,}81} = 2{,}1$ m.

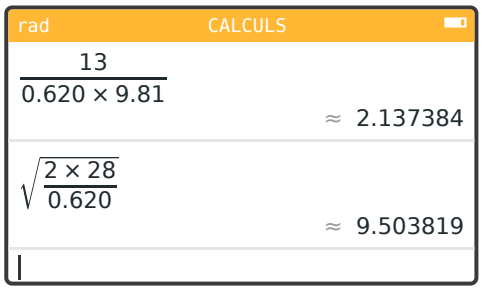
Vitesse : $E_c = \frac{1}{2} m v_A^2$ donc $v_A = \sqrt{\dfrac{2 E_c}{m}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 28}{0{,}620}} = 9{,}5$ m · s^{-1}.

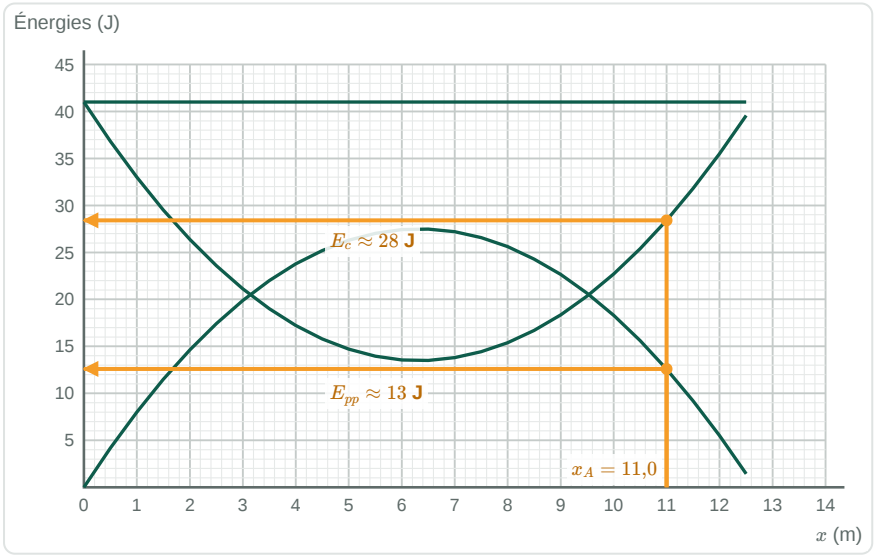
$h_A = 2{,}1$ m et $v_A = 9{,}5$ m · s^{-1}

PIÈGE
L'axe horizontal du document porte x et non le temps : la lecture se fait directement en $x = 11{,}0$ m, sans chercher de date.

COMPRENDRE
Une lecture graphique au joule près ne donne que deux chiffres significatifs. On retrouve la hauteur $z_A = 2{,}1$ m calculée à la question 2.3.

À LA CALCULATRICE





3.2 · Document 1 avec les lectures en $x_A = 11{,}0$ m : courbe 1 horizontale (E_m), courbe 2 en cuvette (E_c), courbe 3 en cloche (E_{pp})

3.3 Que peut-on dire de l'énergie mécanique du ballon lors de son mouvement ? Utiliser cette caractéristique pour retrouver la valeur de v_A, comparer avec la question 3.2 et conclure.

Données utiles $v_0 = 11{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $g = 9{,}81\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $h_A = 2{,}1\ \text{m}$ (3.2)

Le ballon n'est soumis qu'à son poids : son énergie mécanique se conserve (courbe 1 horizontale).

Entre O et A : $E_m(O) = E_m(A)$, soit $\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + 0 = \frac{1}{2}\,m\,v_A^2 + m\,g\,h_A$.

En multipliant par $\frac{2}{m}$: $v_A^2 = v_0^2 - 2\,g\,h_A$, d'où

$$v_A = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,h_A} = \sqrt{11{,}5^2 - 2 \times 9{,}81 \times 2{,}1} = 9{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Cette valeur est identique à celle obtenue par lecture graphique à la question 3.2.

E_m est constante ; $v_A = 9{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, comme en 3.2 : les deux méthodes concordent, le modèle sans frottement est cohérent.

PIÈGE

Écrire $E_{pp}(O) \neq 0$ ou oublier $E_{pp}(A)$: l'origine des énergies potentielles est en O, où $z = 0$, mais pas en A.

COMPRENDRE

Le ballon arrive en A moins vite qu'il n'est parti ($9{,}5 < 11{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) : une partie de son énergie cinétique est devenue de l'énergie potentielle de pesanteur.

À LA CALCULATRICE

