Le muon, explorateur de volcan

Bac S 2015 Polynésie rattrapage (ancien programme) · Exercice 1 **6 points** **Durée conseillée 1 h**

1.1.1 Retrouver par un calcul la durée du trajet, estimée dans les documents, d'un muon créé à 20 km d'altitude et arrivant au sol.

Données utiles $d = 20$ km ; $c = 299\,792\,458$ m · s^{-1} ; vitesse du muon proche de c

Le muon se déplace à une vitesse v très proche de la célérité de la lumière : on prend $v \approx c$.

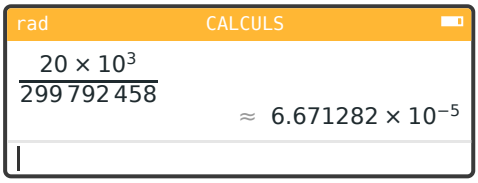
$$\Delta t = \frac{d}{v} \approx \frac{d}{c} = \frac{20 \times 10^3}{299\,792\,458} = 6{,}7 \times 10^{-5} \text{ s}$$

$\Delta t \approx 67\ \mu$s : on retrouve la valeur annoncée dans le document.

PIÈGE
Laisser la distance en kilomètres : il faut $d = 20 \times 10^3$ m pour obtenir une durée en secondes.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la distance de 20 km. Prendre $v = 0{,}9994\,c$ ou $c = 3{,}0 \times 10^8$ m · s^{-1} conduit au même résultat arrondi.

À LA CALCULATRICE



1.1.2 Énoncer le postulat d'Einstein relatif à la vitesse de la lumière.

La vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur c dans tous les référentiels galiléens.

Elle ne dépend donc ni du mouvement de la source, ni de celui de l'observateur.

PIÈGE
Oublier « dans le vide » ou « référentiels galiléens » : ces deux précisions font partie du postulat.

COMPRENDRE
La relativité restreinte figurait au programme de Terminale S ; elle n'est plus au programme actuel de la spécialité. Cet exercice reste un bon entraînement sur les calculs de durées, d'énergies et d'ordres de grandeur.

1.1.3 Expliquer sans calcul pourquoi la détection de nombreux muons au niveau du sol est une preuve expérimentale de la dilatation des durées.

Dans le référentiel terrestre, le trajet du muon dure environ 67 µs, soit 30 fois sa durée de vie propre ΔT_0 (durée de vie mesurée dans le référentiel où le muon est immobile).

Si la durée de vie du muon était la même dans le référentiel terrestre, presque tous les muons se désintégreraient bien avant d'atteindre le sol.

Or on en détecte un grand nombre au sol. Leur durée de vie mesurée dans le référentiel terrestre est donc bien plus grande que ΔT_0 : $\Delta T = \gamma\,\Delta T_0$ avec $\gamma > 1$, car le muon se déplace à une vitesse proche de c.

Les muons vivent plus longtemps pour un observateur terrestre que dans leur référentiel propre : c'est la dilatation des durées.

MÉTHODE
Toujours préciser le référentiel de chaque durée : la durée propre se mesure dans le référentiel où les deux événements (création et désintégration du muon) ont lieu au même endroit.

1.2 Pourquoi le muon, le proton et l'électron subissent-ils une force magnétique de même intensité à vitesse égale ? Justifier que la différence de courbure montre que la masse du muon est intermédiaire.

Même intensité. D'après les données, l'intensité F de la force magnétique est proportionnelle à la vitesse, à la valeur absolue de la charge et au champ magnétique ; elle ne dépend pas de la masse. Les trois particules ont la même vitesse, sont dans le même champ et portent une charge de même valeur absolue e : F est donc la même pour les trois.

Courbure. Deuxième loi de Newton appliquée à une particule de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen : $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$.

À force égale, plus la masse est grande, plus l'accélération est faible : la direction du vecteur vitesse change moins vite et la trajectoire est moins incurvée.

La trajectoire du muon est moins incurvée que celle de l'électron et plus incurvée que celle du proton.

$$m_{\text{électron}} < m_{\mu} < m_{\text{proton}}$$

PIÈGE
Dire que la force est plus faible sur le proton parce qu'il est plus lourd. La force est identique ; c'est son effet, l'accélération, qui dépend de la masse.

COMPRENDRE
Pour un mouvement circulaire, $a = \dfrac{v^2}{R}$ donc $R = \dfrac{m\,v^2}{F}$: à v et F égales, le rayon de la trajectoire est proportionnel à la masse.

2.1 Justifier par un calcul que les muons du CERN ont un temps de vie environ égal à 30 fois leur temps de vie au repos.

Données utiles $v = 0{,}9994\,c$; $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$; $\Delta T = \gamma\,\Delta T_0$

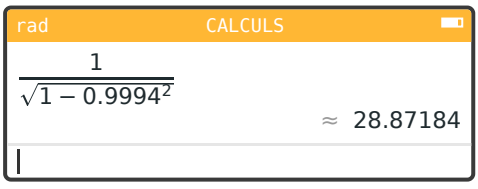
Le temps de vie mesuré dans le laboratoire est $\Delta T = \gamma\,\Delta T_0$, où ΔT_0 est le temps de vie au repos. Il faut donc calculer γ avec $\dfrac{v}{c} = 0{,}9994$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}9994^2}} = 28{,}87$$

$\dfrac{\Delta T}{\Delta T_0} = \gamma \approx 29$, soit environ 30 : l'affirmation est justifiée.

PIÈGE
Oublier le carré ou la racine. Garder aussi tous les chiffres de $0{,}9994$: arrondir à 1 rend le calcul impossible.

À LA CALCULATRICE



2.2 Vérifier la cohérence entre les valeurs « 14 ou 15 tours » et « 400 tours » données dans les documents.

Données utiles $\gamma = 28{,}87$ (2.1)

Selon la mécanique newtonienne, le muon vit une durée ΔT_0 et parcourt 14 ou 15 tours d'anneau.

Dans le laboratoire, il vit en réalité $\Delta T = \gamma\,\Delta T_0$ en gardant la même vitesse : il parcourt donc une distance γ fois plus grande, soit γ fois plus de tours.

$28{,}87 \times 14 = 404$ tours $\qquad$ $28{,}87 \times 15 = 433$ tours

Entre 404 et 433 tours : c'est bien « plus de 400 tours », les deux valeurs sont cohérentes.

MÉTHODE
À vitesse constante, la distance parcourue est proportionnelle à la durée : le nombre de tours est multiplié par le même facteur que la durée de vie.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

28.87 × 14
≈ 404.18

28.87 × 15
≈ 433.05

3.1 Expliquer pourquoi un muon ordinaire d'énergie moyenne 4 GeV ne peut pas servir à radiographier la Soufrière.

Données utiles perte moyenne : 2 MeV par cm de roche ; $E = 4$ GeV ; échelle de la carte : 500 m

Épaisseur de roche L au bout de laquelle le muon a perdu toute son énergie, avec $E = 4\ \text{GeV} = 4 \times 10^3$ MeV :

$$L = \frac{4 \times 10^3}{2} = 2 \times 10^3\ \text{cm} = 20\ \text{m}$$

D'après l'échelle de la carte, la Soufrière mesure plusieurs centaines de mètres de large.

Un muon ordinaire est arrêté après environ 20 m de roche : il ne peut pas traverser le volcan, donc il n'atteint pas le télescope.

PIÈGE
Diviser 4 par 2 sans convertir : 1 GeV vaut 10^3 MeV.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{4 \times 10^3}{2}$
≈ 2000

3.2 Déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie apportée en une minute par le flux de muons ordinaires sur la surface de la Soufrière, puis la comparer à une énergie de son choix.

Données utiles flux : 1 muon par cm² et par minute ; $E = 4$ GeV par muon ; $1\ \text{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}$ J ; $g = 10\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$; carte avec son échelle (500 m)

Diamètre. Sur la carte, le diamètre du disque grisé vaut environ deux fois la longueur du segment de 500 m : $D \approx 1 \times 10^3\ \text{m} = 1 \times 10^5$ cm.

Surface. $S = \pi \dfrac{D^2}{4} = \pi \times \dfrac{(1 \times 10^5)^2}{4} \approx 8 \times 10^9\ \text{cm}^2$

Nombre de muons en une minute. Un muon par cm² : $N \approx 8 \times 10^9$ muons.

Énergie. $E_{\text{tot}} = N \times E = 8 \times 10^9 \times 4 \times 10^9 \times 1{,}60 \times 10^{-19} \approx 5$ J

Comparaison. Soulever une masse de 500 g d'une hauteur de 1 m demande $m\,g\,h = 0{,}500 \times 10 \times 1 = 5$ J.

$E_{\text{tot}} \approx 5$ J, soit quelques joules : l'énergie nécessaire pour soulever un objet de 500 g d'un mètre.

PIÈGE
Calculer S en m² alors que le flux est donné par cm². Penser aussi à convertir les GeV en eV ($\times 10^9$) avant de passer en joules.

COMPRENDRE
Une mesure plus fine à la règle donne D entre 900 m et 1 km ; l'ordre de grandeur ne change pas. L'énergie reçue par tout le volcan est minuscule, alors que chaque muon est très énergétique à l'échelle d'une particule.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{\pi \times (1 \times 10^5)^2}{4}$
≈ 7.853982×10^9

$8 \times 10^9 \times 4 \times 10^9 \times 1.60 \times 10^{-19}$
≈ 5.12

$0.500 \times 10 \times 1$
≈ 5

3.3 Déterminer le rapport v/c pour un muon ordinaire d'énergie 4 GeV. En déduire pourquoi les muons utilisés en radiographie volcanique sont dits « ultra-relativistes ».

Données utiles $E = \gamma\, m\, c^2$; $m_\mu = 105{,}66\ \text{MeV}\cdot c^{-2}$; $E = 4\ \text{GeV} = 4\times10^3\ \text{MeV}$

Avec $m_\mu c^2 = 105{,}66$ MeV : $\gamma = \dfrac{E}{m_\mu c^2} = \dfrac{4\times10^3}{105{,}66} = 37{,}86$

Or $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, donc $1-\dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{1}{\gamma^2}$ et

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{37{,}86^2}} = 0{,}99965$$

Un muon ordinaire va déjà à 99,965 % de la célérité de la lumière. Les muons utilisés pour la radiographie ont une énergie supérieure à 1000 GeV : leur facteur γ est au moins 250 fois plus grand, et leur vitesse encore plus proche de c.

$\dfrac{v}{c} = 0{,}99965$; les muons de radiographie, de vitesse quasiment égale à c, sont « ultra-relativistes ».

PIÈGE

Le rapport v/c doit rester inférieur à 1. Garder assez de chiffres : arrondi à $1{,}00$, le résultat ne veut plus rien dire.

COMPRENDRE

Pour $E = 1000$ GeV, $\gamma \approx 9{,}5\times10^3$: l'écart entre v et c n'apparaît qu'à la neuvième décimale de v/c. La mécanique de Newton ne s'applique plus du tout.

À LA CALCULATRICE

