Galiléo, système de navigation par satellite

Bac S 2015 Asie (ancien programme) · Exercice 1 **6 points** **Durée conseillée 1 h**

1.1 Identifier le domaine commun des ondes radioélectriques auquel appartiennent les trois signaux émis par un satellite Galileo.

Données utiles $f_1 = 1575{,}42$ MHz ; $f_2 = 1278{,}75$ MHz ; $f_3 = 1191{,}80$ MHz ; $c = 3{,}00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; axe des domaines gradué en longueur d'onde

L'axe des domaines est gradué en longueur d'onde : on calcule $\lambda = \dfrac{c}{f}$, avec f en hertz.

$$\lambda_1 = \frac{3{,}00 \times 10^8}{1575{,}42 \times 10^6} = 0{,}190 \text{ m} \qquad \lambda_3 = \frac{3{,}00 \times 10^8}{1191{,}80 \times 10^6} = 0{,}252 \text{ m}$$

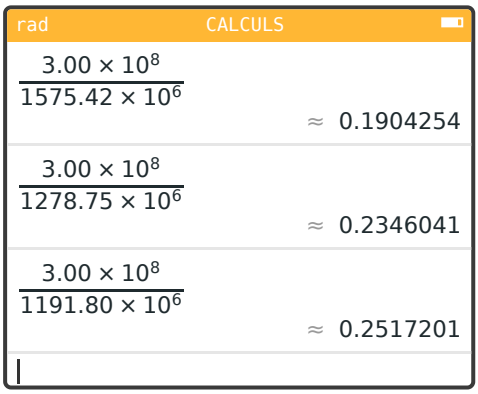
Comme $f_3 < f_2 < f_1$, on a $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ (avec $\lambda_2 = 0{,}235$ m) : les trois longueurs d'onde sont comprises entre 19,0 cm et 25,2 cm, donc entre 10 cm et 1 m.

Les trois signaux appartiennent au domaine des **ultra hautes fréquences (UHF)**.

PIÈGE
Laisser les fréquences en MHz : 1 MHz vaut 10^6 Hz. Sans conversion, on trouve des longueurs d'onde un million de fois trop grandes.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs : le résultat a la précision de la donnée la moins précise, ici c. Calculer les deux longueurs d'onde extrêmes suffit, la troisième est forcément entre les deux.

À LA CALCULATRICE



1.2 À l'aide des documents, donner deux critères permettant au système Galileo d'atténuer le phénomène de « canyons urbains » par rapport à ses concurrents.

- **Le nombre de satellites** : d'après le premier document, davantage de satellites améliore les performances en ville, où les immeubles gênent la transmission. Galileo en compte 30, contre 29 pour Glonass et 24 pour le GPS.
- **Le nombre de bandes de fréquence** : d'après le second document, émettre sur plusieurs bandes limite les erreurs dues aux réflexions sur les bâtiments. Galileo en utilise 3, contre 2 pour Glonass.

Deux critères : un plus grand nombre de satellites (30) et l'emploi de trois bandes de fréquence.

COMPRENDRE
Sur le second critère, Galileo ne devance que Glonass : le GPS utilise lui aussi trois bandes. C'est le nombre de satellites qui le distingue de ses deux concurrents.

MÉTHODE
Question documentaire : pour chaque critère, citer le document, puis appuyer la comparaison sur les valeurs du tableau. Une affirmation sans chiffre ne rapporte pas tous les points.

1.3 La précision de positionnement visée est de moins de 1,0 m. Montrer par un calcul que cette précision nécessite une horloge atomique.

Données utiles $d = 1{,}0$ m ; $c = 3{,}00 \times 10^8$ m · s^{-1}

La position se déduit de la durée de parcours du signal, qui se propage à la célérité c. Une incertitude d sur la distance correspond à une incertitude τ sur la durée mesurée :

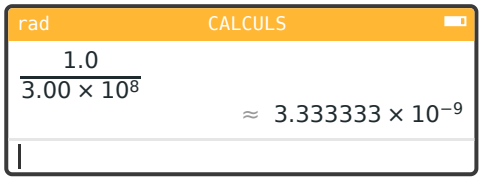
$$\tau = \frac{d}{c} = \frac{1{,}0}{3{,}00 \times 10^8} = 3{,}3 \times 10^{-9} \text{ s}$$

Pour localiser à moins de 1,0 m, il faut donc mesurer des durées à quelques nanosecondes près, ce qu'une horloge ordinaire ne permet pas.

$\tau = 3{,}3 \times 10^{-9}$ s ≈ 3 ns : seule une horloge atomique atteint cette précision.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme d. Le signal met environ 0,08 s pour descendre du satellite : la durée doit être connue à quelques milliardièmes de seconde sur ce trajet.

À LA CALCULATRICE



2.1 Repérer et corriger l'erreur commise dans les expressions mathématiques obtenues par les élèves, dans le cadre du modèle choisi.

Deuxième loi de Newton appliquée au système de masse M constante, dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\vec{P} + \vec{F} = M\,\vec{a}$.

L'axe (Oz) est orienté vers le haut : le poids, dirigé vers le bas, a pour coordonnée $P_z = -Mg$; la poussée, dirigée vers le haut, a pour coordonnée $F_z = +F$.

En projection sur (Oz) : $-Mg + F = M\,a_z$, donc $a_z = \dfrac{F}{M} - g$.

L'accélération est constante. Par intégration, avec une vitesse initiale nulle : $v_z(t) = \left(\dfrac{F}{M} - g\right) t$. Par une seconde intégration, avec $z(0) = 0$:

Erreur de signe devant g. Expressions corrigées : $a_z = \dfrac{F}{M} - g$ et $z(t) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{F}{M} - g\right) t^2$

PIÈGE
Corriger seulement l'accélération : la même erreur de signe se retrouve dans $z(t)$. Les deux expressions doivent être réécrites.

COMPRENDRE
Le signe « $+$ » des élèves signifierait que le poids aide la fusée à monter. Avec le signe « $-$ », la fusée ne décolle que si $F > Mg$.

2.2 Après correction et en restant dans le cadre de ce modèle, calculer la durée nécessaire à la mise en orbite du satellite.

Données utiles $z(t)$ corrigée (2.1) ; $h = 23\,522$ km ; $F = 4 \times 10^6$ N ; $M = 310$ t ; $g = 9{,}81$ m · s^{-2}

Le satellite est en orbite quand $z(t) = h$, avec $h = 23\,522 \times 10^3$ m et $M = 310 \times 10^3$ kg :

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{M} - g\right) t^2 \quad \text{donc} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{\dfrac{F}{M} - g}}$$

(seule la solution positive a un sens).

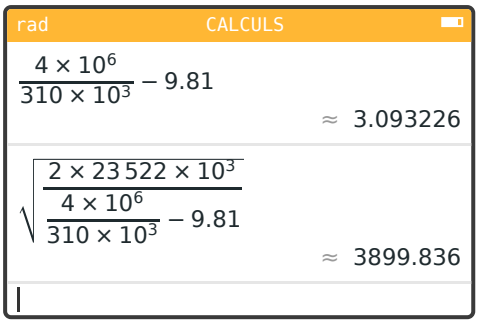
$$t = \sqrt{\frac{2 \times 23\,522 \times 10^3}{\dfrac{4 \times 10^6}{310 \times 10^3} - 9{,}81}} = 3{,}9 \times 10^3 \text{ s}$$

$t \approx 4 \times 10^3$ s, soit un peu plus d'une heure (un seul chiffre significatif, comme F).

PIÈGE
Oublier les conversions : la masse en kilogrammes (1 t = 10^3 kg) et l'altitude en mètres. Avec $M = 310$, on trouverait une durée d'une minute environ.

COMPRENDRE
F/M vaut 12,9 m · s^{-2}, à peine plus que g : l'accélération n'est que de 3,1 m · s^{-2}. Le résultat est donc très sensible à la valeur de F, connue avec un seul chiffre.

À LA CALCULATRICE



2.3 Porter un regard critique sur les hypothèses formulées par les élèves pour construire leur modèle.

Plusieurs hypothèses sont très éloignées de la réalité :

- **masse constante** : la fusée brûle ses ergols et éjecte des gaz, puis largue ses étages ; sa masse diminue fortement pendant le vol ;
- **pesanteur constante** : $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ne vaut qu'au voisinage du sol, alors que l'attraction terrestre diminue nettement sur plus de 23 000 km d'altitude ;
- **poussée constante** : la force de poussée varie au cours du vol et cesse à l'extinction des moteurs ;
- **frottements négligés** : l'action de l'air n'est pas prise en compte dans la traversée de l'atmosphère ;
- **trajectoire verticale** : la fusée s'incline pour donner au satellite une vitesse tangente à son orbite.

Le modèle est trop simplifié : la durée calculée en 2.2 n'est qu'un ordre de grandeur très grossier.

COMPRENDRE
Atteindre l'altitude ne suffit pas : sans vitesse tangentielle adaptée, le satellite retomberait. Le modèle vertical des élèves ne décrit donc pas réellement une mise en orbite.

MÉTHODE
Critiquer un modèle : reprendre une à une les hypothèses de l'énoncé (système, référentiel, forces, grandeurs supposées constantes) et dire pour chacune ce qui se passe en réalité.

3.1 Énoncer la deuxième loi de Kepler (loi des aires) dans le cas général et l'illustrer par un schéma.

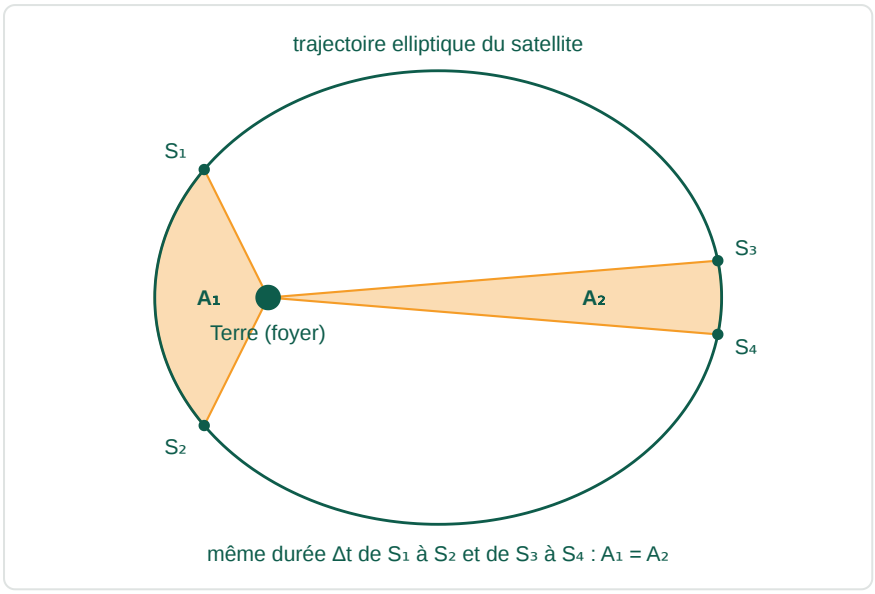
Dans le référentiel géocentrique, le satellite décrit une ellipse dont le centre de la Terre est l'un des foyers.

Sur le schéma, le satellite met la même durée Δt pour aller de S_1 à S_2 et de S_3 à S_4 : les aires A_1 et A_2 sont égales.

Le segment reliant le centre de la Terre au satellite balaie des aires égales pendant des durées égales.

PIÈGE
Placer la Terre au centre de l'ellipse : elle occupe un foyer. Les deux aires doivent partir de ce foyer et paraître égales sur le dessin.

COMPRENDRE
Près de la Terre le segment est court : pour balayer la même aire, le satellite parcourt un arc plus long. Sa vitesse est donc plus grande près de la Terre que loin d'elle.



3.1 · Loi des aires : le satellite va plus vite près de la Terre (arc S_1S_2 plus long que l'arc S_3S_4)

3.2 Montrer que, dans l'approximation d'une trajectoire circulaire, le mouvement du satellite est uniforme.

Sur une orbite circulaire de centre O (centre de la Terre), le segment reliant O au satellite garde une longueur constante, égale au rayon r de l'orbite.

L'aire balayée pendant une durée Δt est un secteur de disque de rayon r : elle est proportionnelle à la longueur L de l'arc parcouru, $A = \frac{1}{2}\, r\, L$.

D'après la loi des aires, A est la même pour toutes les durées Δt égales : comme r est constant, L est aussi la même. Le satellite parcourt des arcs de même longueur pendant des durées égales.

$v = \frac{L}{\Delta t}$ est constante : le mouvement circulaire du satellite est **uniforme**.

PIÈGE
Confondre vitesse constante et vecteur vitesse constant : la valeur v ne change pas, mais la direction du vecteur vitesse change à chaque instant.

MÉTHODE
Autre démonstration classique : deuxième loi de Newton dans le repère de Frenet. La force gravitationnelle est dirigée vers le centre, donc l'accélération tangentielle $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ est nulle et v est constante.

3.3 Comparer qualitativement la période d'un satellite du système Galileo à celles des satellites GPS et Glonass.

Données utiles altitudes : Galileo 23 522 km ; GPS 20 200 km ; Glonass 19 100 km

Troisième loi de Kepler : pour tous les satellites de la Terre, le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du rayon de l'orbite, $\frac{T^2}{r^3} = \text{constante}$, avec $r = R_T + h$.

La période augmente donc avec le rayon de l'orbite, c'est-à-dire avec l'altitude h. Or $h_{\text{Galileo}} > h_{\text{GPS}} > h_{\text{Glonass}}$.

La période d'un satellite Galileo est plus grande que celles des satellites GPS (11 h 58 min) et Glonass (11 h 15 min).

COMPRENDRE
Le tableau le confirme déjà pour les deux concurrents : le GPS, plus haut que Glonass, a la période la plus longue des deux.

3.4 Vérifier la réponse de la question précédente par un calcul.

Données utiles $R_T = 6380$ km ; $h = 23\,522$ km ; $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2}

Pour un satellite en orbite circulaire de rayon $r = R_T + h$ autour de la Terre, la troisième loi de Kepler s'écrit :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_T} \quad \text{donc} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{G\,M_T}}$$

Avec $R_T + h = 6380 \times 10^3 + 23\,522 \times 10^3 = 2{,}9902 \times 10^7$ m :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(2{,}9902\times10^7)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}} = 5{,}14\times10^4 \text{ s}$$

$T = 5{,}14 \times 10^4$ s ≈ 14 h 17 min : c'est bien plus que 11 h 58 min (GPS) et 11 h 15 min (Glonass).

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$6380 \times 10^3 + 23\,522 \times 10^3 \approx 2.9902 \times 10^7$

$2 \times \pi \times \sqrt{\frac{29\,902\,000^3}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}} \approx 51441.87$

$\frac{51\,441.86616}{3600} \approx 14.28941$

$\frac{51\,441.86616 - 14 \times 3600}{60} \approx 17.36444$

PIÈGE
Utiliser l'altitude h à la place du rayon de l'orbite $R_T + h$, ou laisser les distances en kilomètres : G est donnée en unités SI, il faut des mètres.

COMPRENDRE
Contrôle : la même formule avec $h = 20\,200$ km donne $4{,}31 \times 10^4$ s, soit 11 h 58 min, la valeur du tableau pour le GPS.

MÉTHODE
La constante se retrouve avec la deuxième loi de Newton sur l'orbite circulaire : $\frac{G\,M_T}{r^2} = \frac{v^2}{r}$ donne $v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}}$, puis $T = \frac{2\pi r}{v}$.