Tomographie par émission de positons

Bac S 2016 Nouvelle-Calédonie rattrapage (ancien programme) · Exercice 2 **10 points** **Durée conseillée 1 h 40**

1.1 L'étape 1 est-elle une addition, une élimination ou une substitution ? Justifier.

Au cours de l'étape 1, le groupe $-O-Tf$ porté par un atome de carbone du composé A est remplacé par un atome de fluor 18. Un groupe d'atomes prend la place d'un autre, sans création ni disparition de liaison multiple.

L'étape 1 est une **substitution**.

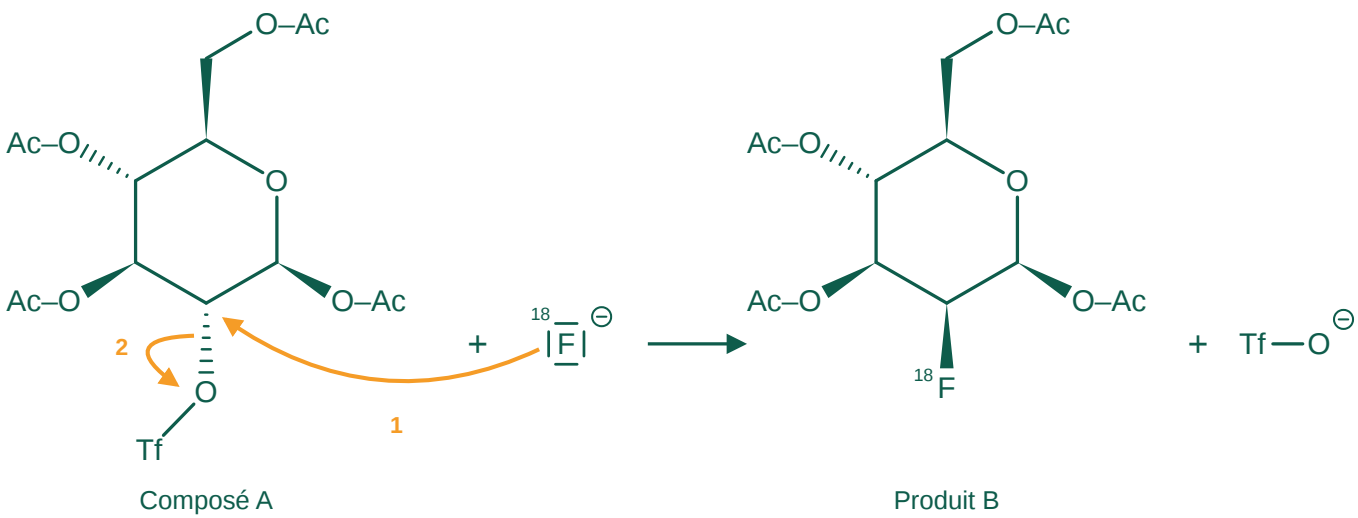
MÉTHODE
Compter réactifs et produits : addition, deux réactifs donnent un produit ; élimination, un réactif donne deux produits ; substitution, deux réactifs donnent deux produits par échange d'un groupe.

1.2 À l'aide des flèches courbes, représenter sur la figure A de l'annexe la formation et la rupture de liaisons de l'étape 1.

Flèche 1 : elle part d'un doublet non liant de l'ion fluorure F^- (site donneur) et pointe vers l'atome de carbone lié au groupe $-O-Tf$ (site accepteur) : la liaison $C-F$ se forme.

Flèche 2 : elle part du doublet de la liaison $C-O$ et pointe vers l'atome d'oxygène du groupe $-O-Tf$: la liaison $C-O$ se rompt et l'oxygène emporte le doublet.

Deux flèches courbes : doublet de F^- vers C, puis liaison $C-O$ vers O (figure A).



1.2 · Figure A complétée : flèches courbes de l'étape 1 en orange

1.3 Indiquer par un astérisque, sur la figure B de l'annexe, le ou les atomes de carbone asymétriques de la molécule de FDG.

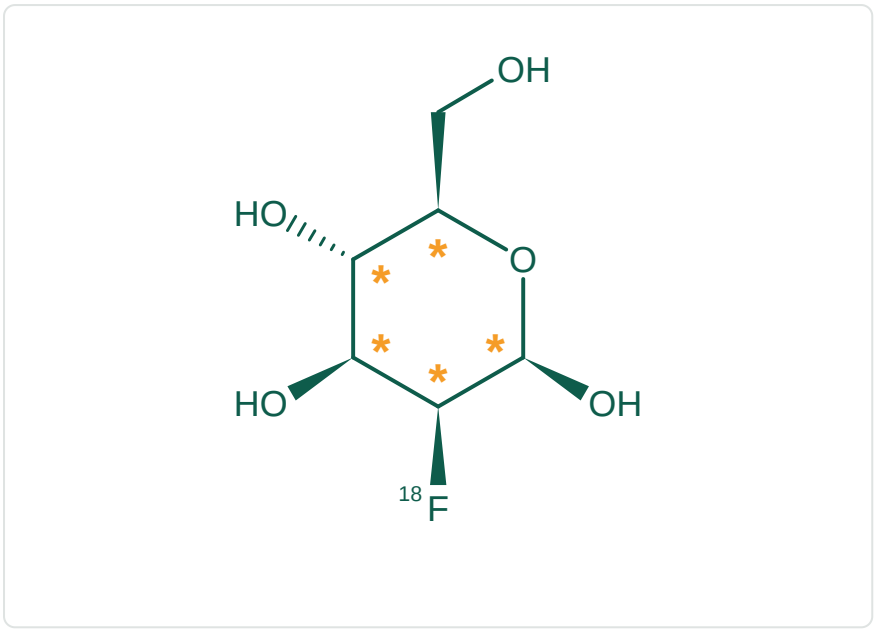
Un atome de carbone asymétrique est un carbone tétraédrique lié à quatre atomes ou groupes d'atomes tous différents.

Les cinq atomes de carbone du cycle répondent à cette définition. Le carbone du groupe $-CH_2OH$ porte deux atomes d'hydrogène : il n'est pas asymétrique.

Le FDG possède **5 atomes de carbone asymétriques** (figure B).

PIÈGE
En formule topologique, les atomes d'hydrogène ne sont pas dessinés. Chaque carbone du cycle porte un H en plus du substituant visible, et les deux côtés du cycle ne sont pas équivalents.

COMPRENDRE
Le carbone asymétrique n'est plus exigible dans le programme actuel de spécialité de Terminale ; la définition donnée ici suffit pour répondre.



1.3 · Figure B complétée : les cinq atomes de carbone asymétriques du FDG

2.1 Déterminer la concentration molaire de FDG de la solution contenue dans le flacon.

Données utiles $C_0 = 5{,}0 \times 10^{-8}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$; $V_0 = 2{,}5\ \text{mL}$; $V_f = 15\ \text{mL}$

Lors d'une dilution, la quantité de matière de soluté se conserve : $C_0\,V_0 = C_f\,V_f$, d'où

$$C_f = \frac{C_0\,V_0}{V_f} = \frac{5{,}0 \times 10^{-8} \times 2{,}5}{15}$$

$C_f = 8{,}3 \times 10^{-9}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme les données les moins précises. Les deux volumes peuvent rester en mL : seul leur rapport intervient.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{5.0 \times 10^{-8} \times 2.5}{15} \approx 8.333333 \times 10^{-9}$

2.2 Vérifier que le flacon préparé précédemment respecte les consignes de sécurité.

Données utiles $A_{max} = 1{,}0 \times 10^{10}$ Bq ; $A = \lambda \times N$; $\lambda = 1{,}05 \times 10^{-4}\ \text{s}^{-1}$; $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$

Le flacon contient tout le FDG prélevé : $n = C_0\,V_0$, soit un nombre de molécules $N = n\,N_A = C_0\,V_0\,N_A$.

$$A = \lambda\,C_0\,V_0\,N_A = 1{,}05 \times 10^{-4} \times 5{,}0 \times 10^{-8} \times 2{,}5 \times 10^{-3} \times 6{,}02 \times 10^{23}$$

$A = 7{,}9 \times 10^{9}\ \text{Bq} < A_{max} = 1{,}0 \times 10^{10}\ \text{Bq}$: le flacon respecte les consignes de sécurité.

PIÈGE
Laisser le volume en mL : la concentration est en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$, il faut $V_0 = 2{,}5 \times 10^{-3}$ L. Le calcul avec C_f et $V_f = 15 \times 10^{-3}$ L donne le même résultat.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1.05 \times 10^{-4} \times 5.0 \times 10^{-8} \times 2.5 \times 10^{-3} \times 6.02 \times 10^{23} \approx 7.90125 \times 10^{9}$

2.3 Estimer le nombre de patients adultes à qui l'on pourra injecter la dose recommandée avec un flacon.

Données utiles $A = 7{,}9 \times 10^9$ Bq ; dose recommandée : $3{,}7\ \text{MBq} \cdot \text{kg}^{-1}$

Donnée manquante : la masse d'un adulte, estimée à $m \approx 70$ kg.

Activité à injecter à un patient : $A_1 = 3{,}7 \times 10^6 \times 70 = 2{,}6 \times 10^8$ Bq.

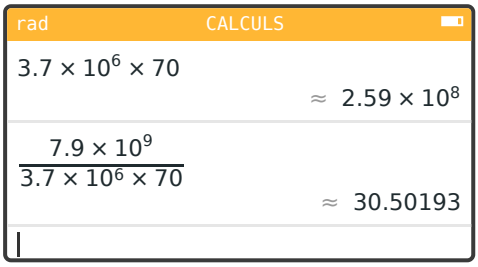
Nombre de patients : $\dfrac{A}{A_1} = \dfrac{7{,}9 \times 10^9}{3{,}7 \times 10^6 \times 70} \approx 30{,}5$

Un flacon permet de traiter environ **30 patients** adultes.

PIÈGE
Oublier la conversion $1\ \text{MBq} = 10^6$ Bq, ou arrondir à 31 : le flacon ne contient pas de quoi faire une 31e injection complète.

COMPRENDRE
C'est une estimation : toute masse entre 60 et 80 kg est acceptée si elle est annoncée. L'activité décroît aussi au cours du temps, ce que ce calcul néglige.

À LA CALCULATRICE



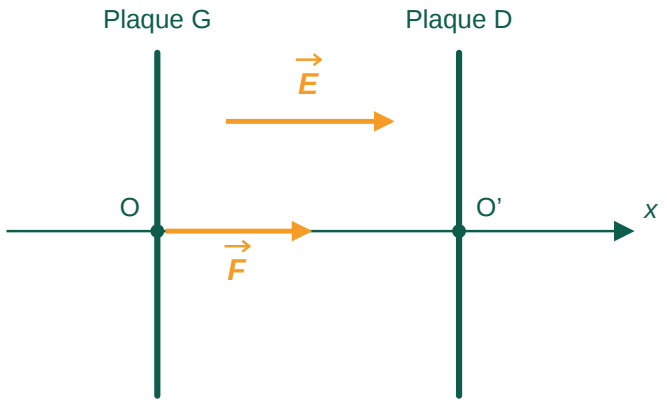
3.1 Sachant que le proton doit être accéléré, représenter sur l'annexe la force électrique $\vec{F}$ exercée sur le proton en O et un vecteur champ électrique $\vec{E}$ entre les plaques. Justifier.

Le proton part de O sans vitesse et doit être accéléré vers O' : la force électrique $\vec{F}$ est donc perpendiculaire aux plaques et dirigée de O vers O' (sens de l'axe Ox).

Or $\vec{F} = q\,\vec{E} = e\,\vec{E}$ avec $e > 0$: $\vec{E}$ a la même direction et le même sens que $\vec{F}$.

$\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont horizontaux, orientés de la plaque G vers la plaque D (annexe).

PIÈGE
Dessiner $\vec{E}$ en sens inverse de $\vec{F}$: ce serait le cas pour un électron, de charge négative. Le point d'application de $\vec{F}$ est O.



3.1 · Annexe complétée : force et champ électriques entre les plaques

3.2 Établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du proton entre O et O' en fonction de $\vec{E}$.

Système : {proton}, de masse m_p constante ; référentiel du laboratoire, supposé galiléen. Seule force prise en compte : la force électrique $\vec{F} = e\,\vec{E}$ (poids négligé).

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_p\,\vec{a}$, soit $e\,\vec{E} = m_p\,\vec{a}$.

$$\vec{a} = \frac{e}{m_p}\,\vec{E}$$

COMPRENDRE
Le champ étant uniforme, $\vec{a}$ est un vecteur constant : le mouvement entre les plaques est rectiligne uniformément accéléré.

3.3 Montrer que l'abscisse du proton sur son trajet OO' est donnée par $x(t) = \dfrac{e\,|U|}{2\,m_p\,d}\,t^2$.

Données utiles $E = \dfrac{|U|}{d}$; à $t = 0$: proton en O, sans vitesse initiale

$\vec{E}$ est orienté selon Ox : en projection, $a_x = \dfrac{e\,E}{m_p}$.

Comme $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$, par intégration : $v_x(t) = \dfrac{e\,E}{m_p}\,t + C_1$. À $t = 0$, $v_x(0) = 0$ donc $C_1 = 0$.

Comme $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, par intégration : $x(t) = \dfrac{e\,E}{2\,m_p}\,t^2 + C_2$. À $t = 0$, $x(0) = 0$ donc $C_2 = 0$.

Avec $E = \dfrac{|U|}{d}$:

$$x(t) = \frac{e\,|U|}{2\,m_p\,d}\,t^2$$, ce qui est la relation attendue.

MÉTHODE
Accélération, puis vitesse, puis position : deux intégrations successives, et à chaque fois une constante fixée par les conditions initiales, à écrire explicitement même lorsqu'elle est nulle.

3.4 En déduire la valeur de la durée Δt_1 mise par le proton pour aller de O à O'.

Données utiles $d = 2$ mm ; $U = 30$ kV ; $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg ; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

Le proton atteint O' lorsque $x(\Delta t_1) = d$: $\quad d = \dfrac{e\,|U|}{2\,m_p\,d}\,\Delta t_1^2$, d'où

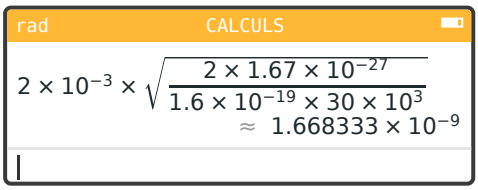
$$\Delta t_1 = d\sqrt{\frac{2\,m_p}{e\,|U|}} = 2 \times 10^{-3} \times \sqrt{\frac{2 \times 1{,}67 \times 10^{-27}}{1{,}6 \times 10^{-19} \times 30 \times 10^{3}}}$$

$$\Delta t_1 = 1{,}7 \times 10^{-9}\ \text{s} \approx 2\ \text{ns}$$

PIÈGE
Oublier que d apparaît deux fois (dans $x = d$ et dans E) : il sort de la racine. Convertir d en m et U en V.

COMPRENDRE
$d = 2$ mm n'a qu'un chiffre significatif : le résultat s'arrondit à 2 ns, valeur reprise par l'énoncé à la question 3.7.

À LA CALCULATRICE



3.5 Le mouvement du proton entre O' et A' est circulaire uniforme. En déduire la relation entre la vitesse v, le rayon R de la trajectoire et la durée Δt_2 du demi-tour.

Entre O' et A', le proton parcourt un demi-cercle de rayon R, de longueur πR, à vitesse de valeur constante v :

$$v = \frac{\pi\,R}{\Delta t_2}$$

PIÈGE
Écrire $2\pi R$: c'est la longueur d'un tour complet, alors que le proton ne fait qu'un demi-tour dans le dee.

3.6 Montrer que $\Delta t_2 = \dfrac{\pi\, m_p}{e\, B}$. En déduire que tous les demi-tours suivants ont la même durée.

Données utiles $R = \dfrac{m_p\, v}{e\, B}$; $v = \dfrac{\pi R}{\Delta t_2}$ (3.5)

D'après 3.5 : $\Delta t_2 = \dfrac{\pi\, R}{v}$. En remplaçant R par $\dfrac{m_p\, v}{e\, B}$:

$$\Delta t_2 = \frac{\pi}{v} \times \frac{m_p\, v}{e\, B} = \frac{\pi\, m_p}{e\, B}$$

Cette durée ne dépend ni de v ni de R, seulement de m_p, e et B, qui restent constants.

$\Delta t_2 = \dfrac{\pi\, m_p}{e\, B}$: tous les demi-tours ont la même durée, quelle que soit la vitesse du proton.

COMPRENDRE
À chaque passage le proton va plus vite, mais le rayon grandit dans la même proportion : le demi-cercle est plus long et la durée ne change pas.

COMPRENDRE
Le mouvement dans un champ magnétique n'est plus au programme de spécialité : la relation donnant R est fournie, elle n'est pas à démontrer.

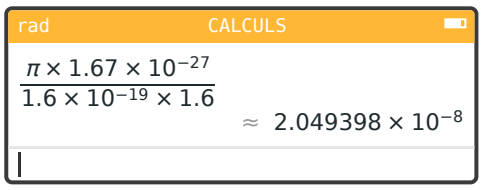
3.7 En considérant que Δt_1 est de l'ordre de 2 ns, montrer que la durée Δt_2 d'un demi-tour est environ dix fois plus grande.

Données utiles $B = 1{,}6$ T ; $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg ; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

$$\Delta t_2 = \frac{\pi\, m_p}{e\, B} = \frac{\pi \times 1{,}67 \times 10^{-27}}{1{,}6 \times 10^{-19} \times 1{,}6} = 2{,}0 \times 10^{-8}\ \text{s} = 20\ \text{ns}$$

$\dfrac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \dfrac{20}{2} = 10$: un demi-tour dure environ dix fois plus longtemps qu'une phase d'accélération.

À LA CALCULATRICE



3.8 Évaluer le nombre de tours que doit faire le proton pour atteindre 16 MeV, puis la durée nécessaire pour qu'il sorte du cyclotron. Comparer avec la valeur du texte.

Données utiles $U = 30$ kV ; $E_c = 16$ MeV ; $\Delta t_2 = 2{,}0 \times 10^{-8}$ s (3.7) ; Δt_1 négligeable

Travail de la force électrique, constante, sur le trajet OO' : $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{OO'} = e\, E\, d = e\, |U|$.

À chaque passage entre les dees, le proton gagne donc $\Delta E_c = e\, |U| = 30$ keV $= 3{,}0 \times 10^4$ eV.

Parti sans vitesse, il doit effectuer $\dfrac{16 \times 10^6}{3{,}0 \times 10^4} \approx 533$ passages. Un tour comporte deux passages : $N \approx 267$ tours.

Un tour dure $2\,\Delta t_1 + 2\,\Delta t_2 \approx 2\,\Delta t_2$, donc $\Delta t = N \times 2\,\Delta t_2 = 267 \times 2 \times 2{,}0 \times 10^{-8} = 1{,}1 \times 10^{-5}$ s.

$N \approx 2{,}7 \times 10^2$ tours et $\Delta t \approx 11\ \mu$s : en accord avec la « dizaine de microsecondes » du texte.

PIÈGE
Compter un seul gain d'énergie par tour : le proton traverse deux fois l'espace entre les dees à chaque tour, et le champ est inversé entre-temps.

MÉTHODE
Une charge e accélérée sous une tension de 30 kV gagne 30 keV : rester en électronvolts évite toute conversion en joules.

À LA CALCULATRICE

