EXERCICE II – TOMOGRAPHIE PAR ÉMISSION DE POSITONS (10 points)

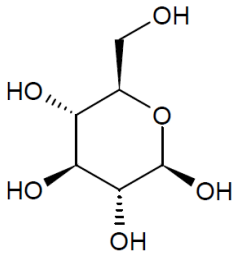
Le ^{18}F-FDG (FluoroDésoxyGlucose) est un dérivé du D-glucose contenant du fluor 18, isotope radioactif du fluor. Injecté à un patient juste avant un examen appelé **PET**-scan (**T**omographie par **É**mission de **P**ositons), le ^{18}F-FDG permet de localiser en direct les zones de l'organisme qui consomment le plus de D-glucose, comme les cellules du cerveau en activité.
Cet exercice se propose d'étudier la synthèse du ^{18}F-FDG à partir de l'isotope 18 du fluor et son utilisation comme marqueur radioactif lors de l'examen du PET-scan.
Dans tout ce qui suit, le ^{18}F-FDG sera noté plus simplement FDG.

Données :

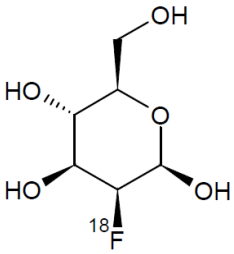
- la valeur de la célérité c de la lumière dans le vide est supposée connue du candidat ;
- la charge électrique du proton : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ;
- masse du proton : $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg ;
- 1 eV = $1{,}60 \times 10^{-19}$ J ;
- constante de Planck : h = $6{,}63 \times 10^{-34}$ J.s ;
- constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1} .

1. Synthèse du FDG

Le FDG est un dérivé du D-glucose dans lequel l'un des groupes hydroxyle (–OH) est remplacé par un atome de fluor 18 radioactif. La similitude de la structure du FDG et du D-glucose fait que le FDG est absorbé par les cellules biologiques de la même façon que le D-glucose. Cependant, la présence de fluor empêche ces cellules de le dégrader pour produire de l'énergie. Le FDG demeure donc plus longtemps dans les cellules.



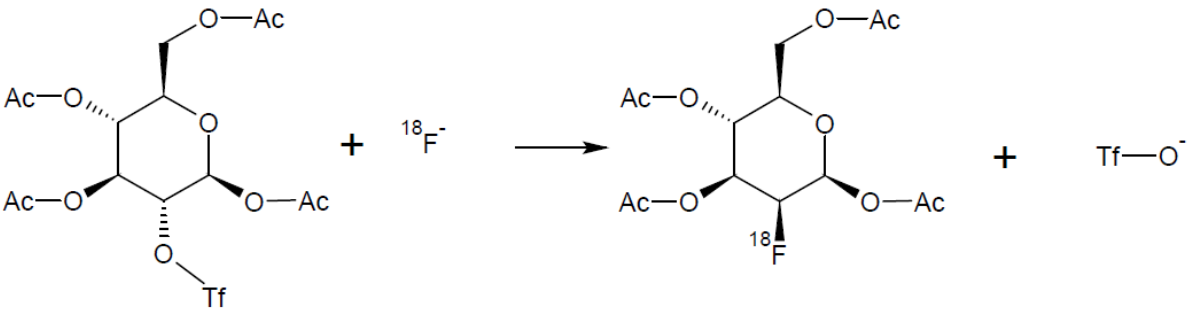
Forme cyclique du D-glucose



FDG

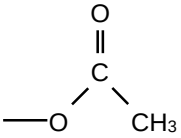
Le FDG est produit au sein même des hôpitaux qui en ont besoin par réaction des ions fluorure 18 avec un composé A représenté ci-dessous. La réaction se déroule en deux étapes :

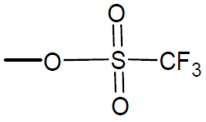
<u>Étape 1</u> :



Composé A

Produit B

où « -O-Ac » représente 

et « -O-Tf » représente 

On obtient ensuite, lors d'une deuxième étape (non décrite ici), le FDG à partir du produit B.

1.1. L'étape 1 est-elle une addition, une élimination ou une substitution ? Justifier.

1.2. À l'aide du formalisme des flèches courbes, matérialiser la formation et la rupture de liaisons de l'étape 1 sur la figure A de L'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.

1.3. Sur la figure B de L'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE, indiquer par un astérisque le(s) atome(s) de carbone asymétrique(s) de la molécule de FDG.

2. Utilisation du FDG pour un diagnostic médical

La tomographie par émission de positons (TEP) est un examen pour le diagnostic médical, reposant sur la détection de positons produits par le FDG. Ce dernier est injecté au patient sous forme d'une solution aqueuse par voie intraveineuse.

Préparation de l'injection :
À l'issue de la synthèse, on obtient une solution aqueuse de FDG de concentration molaire $5{,}0\times10^{-8}$ mol.L^{-1} qu'il faut diluer pour pouvoir l'injecter au patient. Pour cela, on prélève 2,5 mL de solution aqueuse de FDG que l'on introduit dans un flacon. On complète avec une solution saline pour obtenir 15 mL de solution diluée.

2.1. Déterminer la concentration molaire de FDG de la solution contenue dans le flacon.

Pour des raisons de sécurité, l'activité d'un flacon de 15 mL ne doit pas dépasser $A_{max} = 1{,}0\times10^{10}$ Bq. L'activité A d'un flacon de FDG est proportionnelle au nombre N de molécules de FDG qu'il contient. On a $A = \lambda \times N$ où A est exprimée en becquerel (Bq) et $\lambda = 1{,}05\times10^{-4}\ s^{-1}$.

2.2. Vérifier que le flacon préparé précédemment respecte les consignes de sécurité.

On souhaite utiliser un flacon de 15 mL ayant une activité A de $7{,}9\times10^{9}$ Bq pour réaliser un examen sur plusieurs patients. Le protocole médical impose qu'on injecte à chaque patient une quantité de FDG dépendant de sa masse corporelle (exprimée en kg). La dose recommandée pour l'examen envisagé est de 3,7 MBq.kg^{-1}.

2.3. Estimer le nombre de patients adultes à qui l'on pourra injecter la dose recommandée avec un flacon.
Le candidat pourra être amené à estimer la valeur d'une donnée manquante.

3. Production des ions $^{18}F^-$ au moyen d'un cyclotron

Le fluor 18, ^{18}F, nécessaire pour synthétiser le FDG doit être produit artificiellement à l'hôpital. Pour cela, on bombarde au moyen d'un cyclotron, des noyaux d'oxygène 18, ^{18}O, par des protons dont l'énergie cinétique est de 16 MeV.

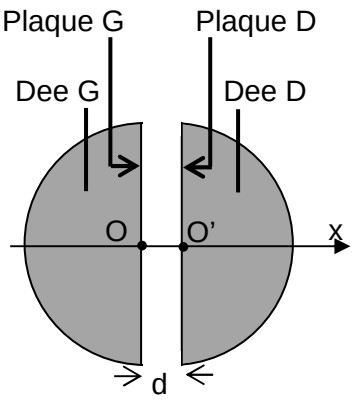


Figure 1. Schéma du cyclotron vu de dessus.

Le cyclotron est un appareil constitué de deux demi-cylindres creux appelés dees. Entre les plaques G et D règne un champ électrique $\vec{E}$ uniforme perpendiculaire à ces plaques.

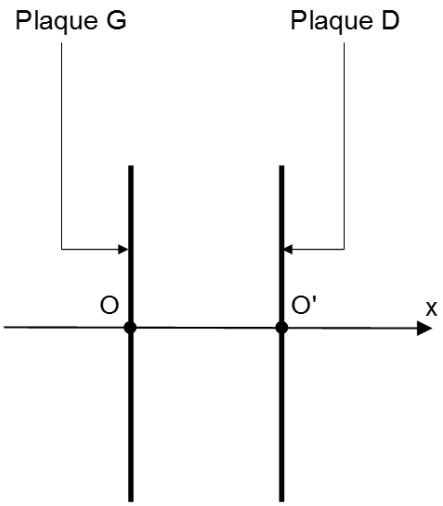
On fait l'hypothèse que le proton n'est pas relativiste et on admettra que son poids est négligeable devant la force électrique.

Les protons placés au point O sont accélérés jusqu'au point O' où ils pénètrent dans le dee D.

L'objectif de cette partie est d'étudier le fonctionnement du cyclotron.

Données :

- l'intensité E du champ électrique entre les deux plaques D et G, aux bornes desquelles est appliquée une tension U, est donnée par $E = \frac{|U|}{d}$, où d est la distance entre les plaques ; E s'exprime en $V.m^{-1}$, U en volt (V) et d en mètre (m).
- distance d entre les plaques D et G : d = 2 mm.



À t = 0, un proton est introduit dans le cyclotron au point O sans vitesse initiale. La tension accélératrice vaut U = 30 kV. On se place sur l'axe Ox horizontal, centré sur O et dirigé vers la droite.

3.1. Sachant que le proton doit être accéléré, compléter le schéma de L'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE en y faisant figurer, sans souci d'échelle :
- le vecteur $\vec{F}$ modélisant la force électrique exercée sur le proton en O ;
- un vecteur champ électrique $\vec{E}$ entre les plaques D et G.
Justifier.

3.2. Établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du proton entre O et O' en fonction de $\vec{E}$.

3.3. Montrer que l'abscisse x du proton sur son trajet OO' est donnée par la relation $x(t) = \frac{e.|U|}{2\,m_p.d}.t^2$.

3.4. En déduire la valeur de la durée Δt_1 mise par le proton pour aller de O à O'.

Dans le dee D, le proton, soumis à un champ magnétique uniforme d'intensité B = 1,6 T, a un mouvement circulaire uniforme jusqu'au point A'. Lorsque le proton arrive au point A', le sens du champ électrique $\vec{E}$ est inversé. Le proton subit alors une nouvelle accélération jusqu'au point A.

Le processus d'accélération et de demi-tour successifs se répète un grand nombre de fois jusqu'à ce que le proton sorte de l'accélérateur avec la vitesse souhaitée pour bombarder la cible.
Une dizaine de microsecondes est nécessaire pour atteindre une telle vitesse.

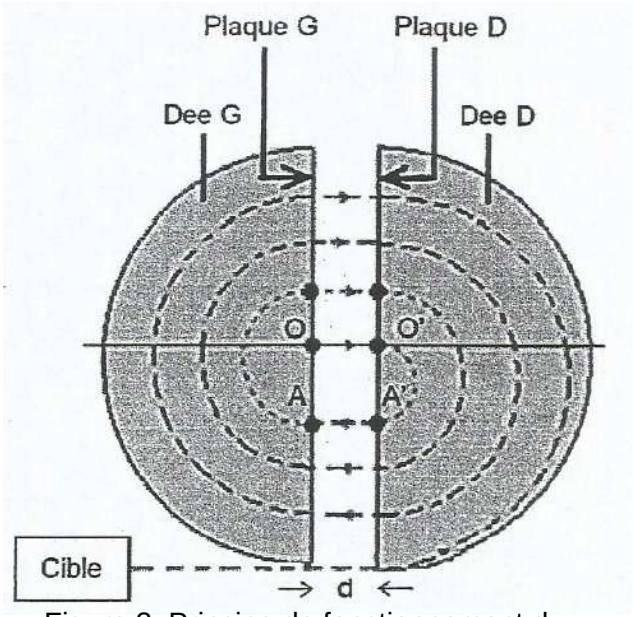


Figure 2. Principe de fonctionnement du cyclotron

3.5. Le mouvement du proton entre O' et A' est circulaire uniforme. En déduire la relation entre la vitesse v du proton, le rayon R de sa trajectoire et la durée Δt_2 de ce premier demi-tour.

Le rayon R de la trajectoire d'un proton dans un dee est donné par la relation $R = \frac{m_p.v}{e.B}$, où v est la vitesse du proton.

3.6. Montrer à partir des résultats des questions précédentes que la durée Δt_2 peut s'exprimer sous la forme : $\Delta t_2 = \frac{\pi.m_p}{e.B}$. En déduire que tous les demi-tours suivants ont la même durée.

3.7. En considérant que la durée Δt_1 d'une phase d'accélération est de l'ordre de 2 ns, montrer que la durée Δt_2 d'un demi-tour est environ dix fois plus grande.
Par la suite on considérera que la durée Δt_1 est négligeable devant la durée Δt_2.

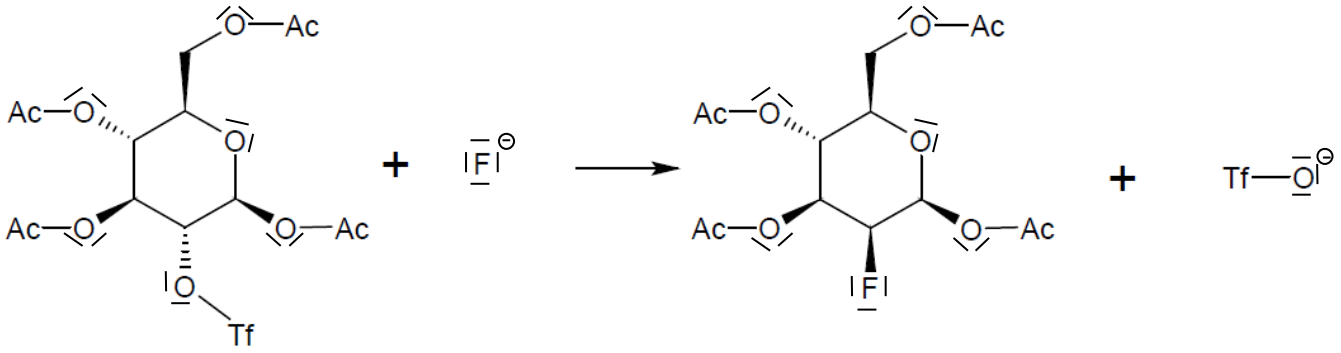
La variation d'énergie cinétique du proton à chaque passage d'un dee à l'autre est égale au travail W de la force électrique $\vec{F}$ exercée sur le proton lors de ce passage.

3.8. Évaluer le nombre de tours que doit faire le proton pour qu'il atteigne, à la sortie du cyclotron, une énergie de 16 MeV. Évaluer la durée pour que le proton sorte du cyclotron et comparer la valeur obtenue avec celle du texte décrivant le principe de fonctionnement du cyclotron.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

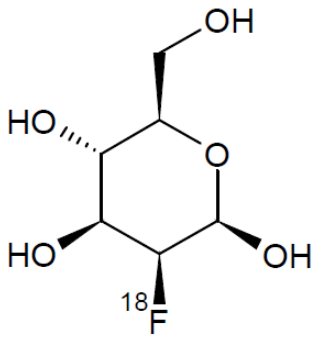
ANNEXE DE L'EXERCICE II

Question 1.2.
Figure A :



Composé A — Produit B

Question 1.3.
Figure B :



Question 3.1.

