Interférences de molécules

Bac S 2017 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 2 **11 points** **Durée conseillée 1 h 50**

1.1 À quelle condition obtient-on, en un point de l'écran, des interférences constructives lorsque deux ondes lumineuses cohérentes interfèrent ?

Les interférences sont constructives en un point si les deux ondes y arrivent **en phase**.

Cela se produit lorsque la différence de marche δ entre les deux ondes est un multiple entier de la longueur d'onde :

$\delta = k\,\lambda$, avec k entier relatif.

COMPRENDRE

Si $\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$, les ondes arrivent en opposition de phase : les interférences sont destructives et le point est sombre.

1.2 Pour un angle α petit, exprimé en radians, montrer que $L = \frac{\lambda D}{a}$ (relation 1).

Données utiles $\sin\alpha = \frac{\lambda}{a}$; $\sin\alpha \approx \alpha$ et $\tan\alpha \approx \alpha$

Sur la figure 2, le triangle formé par le réseau, le centre de la frange centrale et le centre de la première frange voisine est rectangle au centre de la frange centrale :

$$\tan\alpha = \frac{L}{D}$$

L'angle α étant petit : $\tan\alpha \approx \alpha$, donc $\alpha \approx \frac{L}{D}$.

De même $\sin\alpha \approx \alpha$, et la relation admise donne $\alpha \approx \frac{\lambda}{a}$.

En égalant les deux expressions de α : $\frac{L}{D} = \frac{\lambda}{a}$, d'où

$L = \frac{\lambda D}{a}$: c'est bien la relation 1.

MÉTHODE

Pour relier une distance lue sur l'écran à un angle, repérer le triangle rectangle, écrire la tangente, puis appliquer l'approximation des petits angles, valable en radians seulement.

1.3 En lumière blanche, donner l'ordre dans lequel le bleu et le rouge apparaissent sur la première frange voisine, en partant du centre de la tache centrale. Argumenter sans calcul avec la relation 1.

D'après la relation 1, $L = \frac{\lambda D}{a}$: comme D et a sont fixés, L est proportionnelle à la longueur d'onde λ.

Or $\lambda_{\text{bleu}} < \lambda_{\text{rouge}}$, donc $L_{\text{bleu}} < L_{\text{rouge}}$.

En partant du centre, on observe d'abord le **bleu**, puis le **rouge**.

COMPRENDRE

Au centre, $L = 0$ quelle que soit la longueur d'onde : toutes les radiations s'y superposent, ce qui explique la frange centrale blanche.

2.1.1 Démontrer que les équations horaires du mouvement de la molécule dans le repère (Ox, Oz) sont $x(t) = v_0\,t$ et $z(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2$.

Données utiles axe Oz vertical orienté vers le bas ; à $t = 0$, molécule en O avec une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale

Système {molécule} de masse m constante ; référentiel du laboratoire, galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{a} = m\,\vec{g}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Comme Oz est orienté vers le bas : $a_x = 0$ et $a_z = g$.

Or $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$; on cherche les primitives : $v_x = C_1$ et $v_z = g\,t + C_2$.

À $t = 0$, $\vec{v}_0$ est horizontale : $v_x(0) = v_0$ et $v_z(0) = 0$, donc $C_1 = v_0$ et $C_2 = 0$.

$$v_x = v_0 \qquad v_z = g\,t$$

Or $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$; on cherche de nouveau les primitives : $x = v_0\,t + C_3$ et $z = \frac{1}{2}\,g\,t^2 + C_4$.

À $t = 0$, la molécule est en O : $x(0) = 0$ et $z(0) = 0$, donc $C_3 = C_4 = 0$.

$$\boxed{x(t) = v_0\,t \text{ et } z(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2}$$

PIÈGE
Écrire $a_z = -g$ par habitude. Ici l'axe Oz pointe vers le bas, comme $\vec{g}$: la coordonnée est positive.

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, puis deux recherches de primitives, chacune suivie des conditions initiales pour fixer les constantes.

2.1.2 Exprimer la date t_1 à laquelle la molécule atteint le réseau en fonction de v_0 et D_1. En déduire l'expression de H_0 en fonction de g, D_1 et v_0, puis calculer sa valeur.

Données utiles $D_1 = 566\ \text{mm}$; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $v_0 = 1{,}5 \times 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

La molécule atteint le réseau quand $x(t_1) = D_1$, soit $v_0\,t_1 = D_1$:

$$t_1 = \frac{D_1}{v_0}$$

À cette date, elle est descendue de $H_0 = z(t_1) = \frac{1}{2}\,g\,t_1^2$, d'où

$$H_0 = \frac{g\,D_1^2}{2\,v_0^2}$$

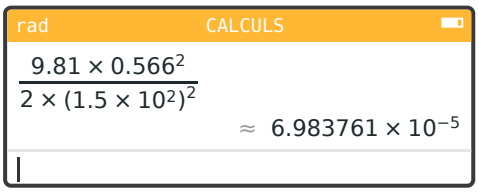
$$H_0 = \frac{9{,}81 \times (566 \times 10^{-3})^2}{2 \times (1{,}5 \times 10^2)^2}$$

$$\boxed{H_0 = 7{,}0 \times 10^{-5}\ \text{m, soit } 70\ \mu\text{m}.}$$

PIÈGE
Laisser D_1 en millimètres : il faut $D_1 = 0{,}566\ \text{m}$. Ne pas oublier non plus le carré, qui porte sur D_1 et sur v_0.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme v_0, la donnée la moins précise. La chute est infime : 70 µm sur un parcours de 57 cm, la trajectoire est presque rectiligne.

À LA CALCULATRICE



2.1.3 Indiquer, en le justifiant brièvement, comment évolue la distance H_0 lorsque la vitesse initiale v_0 de la molécule augmente.

$H_0 = \dfrac{g\,D_1^2}{2\,v_0^2}$ avec g et D_1 constants : H_0 est inversement proportionnelle à v_0^2.

Quand v_0 augmente, H_0 **diminue**.

COMPRENDRE
Une molécule plus rapide met moins de temps pour atteindre le réseau : elle a moins le temps de tomber.

2.2.1 Quel caractère de la matière est mis en évidence par cette figure d'interférences ?

Les interférences sont un phénomène propre aux ondes. En obtenir avec des molécules montre que la matière se comporte ici comme une onde.

La figure met en évidence le **caractère ondulatoire** de la matière.

COMPRENDRE
Chaque molécule frappe l'écran en un point, comme une particule ; la figure d'interférences n'apparaît qu'après un grand nombre d'impacts. C'est la dualité onde-particule.

2.2.2 Vérifier que la masse d'une molécule de phtalocyanine est $m = 8{,}55 \times 10^{-25}$ kg.

Données utiles $M = 514{,}5\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$

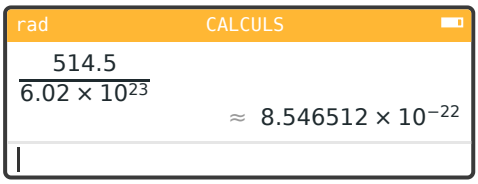
Une mole de phtalocyanine, de masse M, contient N_A molécules :

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{514{,}5}{6{,}02 \times 10^{23}} = 8{,}55 \times 10^{-22}\ \text{g}$$

$m = 8{,}55 \times 10^{-25}$ kg : c'est bien la valeur annoncée.

PIÈGE
Le quotient $\dfrac{M}{N_A}$ donne une masse en grammes, puisque M est en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$. Il reste à convertir en kilogrammes.

À LA CALCULATRICE



2.2.3 Calculer la longueur d'onde de de Broglie λ_{DB} associée à une molécule de phtalocyanine de vitesse $v_0 = 1{,}5 \times 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Données utiles $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$; $m = 8{,}55 \times 10^{-25}$ kg (2.2.2)

Relation de de Broglie : $\lambda_{DB} = \dfrac{h}{p}$, avec la quantité de mouvement $p = m\,v_0$.

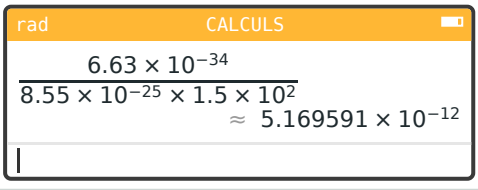
$$\lambda_{DB} = \frac{h}{m\,v_0} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}}{8{,}55 \times 10^{-25} \times 1{,}5 \times 10^2}$$

$\lambda_{DB} = 5{,}2 \times 10^{-12}$ m, soit 5,2 pm.

PIÈGE
La masse doit être en kilogrammes pour obtenir des mètres, l'unité de h le rappelle. Sur la calculatrice, mettre le dénominateur entre parenthèses.

COMPRENDRE
La relation de de Broglie et les ondes de matière figuraient au programme de Terminale S ; elles ne sont plus au programme actuel de spécialité.

À LA CALCULATRICE



2.2.4 Indiquer, en le justifiant brièvement, comment évolue la longueur d'onde de de Broglie d'une molécule de phtalocyanine lorsque sa vitesse initiale v_0 augmente.

$\lambda_{DB} = \dfrac{h}{m\,v_0}$ avec h et m constants : λ_{DB} est inversement proportionnelle à v_0.

Quand v_0 augmente, λ_{DB} **diminue**.

2.2.5 Comparer la valeur de L_0 obtenue à partir de la courbe expérimentale (figure 6) à celle calculée avec la relation 1 appliquée au dispositif expérimental.

Données utiles $a = 100\ \text{nm}$; $D_2 = 564\ \text{mm}$; $\lambda_{DB} = 5{,}17 \times 10^{-12}\ \text{m}$ (2.2.3, valeur non arrondie)

Lecture de la courbe. Les deux premières franges voisines sont symétriques par rapport à la frange centrale. La distance entre leurs maximums vaut $2L_0 \approx 54\ \mu\text{m}$, donc

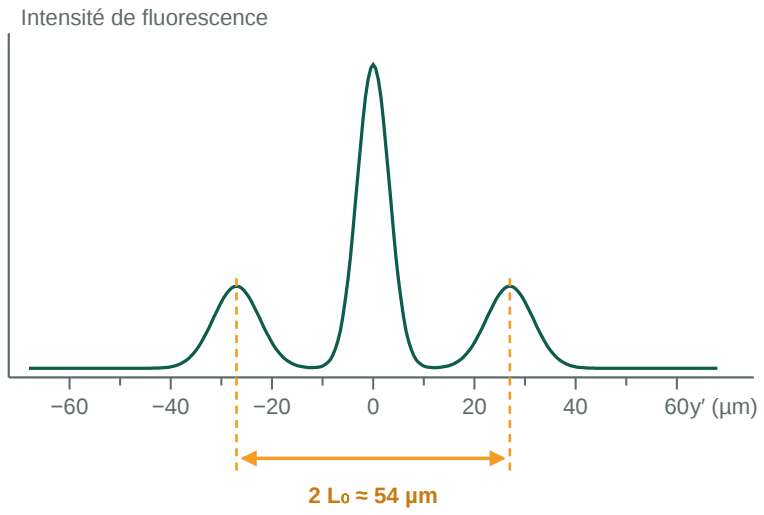
$$L_{0,\text{exp}} = \frac{54}{2} = 27\ \mu\text{m}$$

Calcul. Entre le réseau et l'écran, la distance est D_2 et l'onde associée aux molécules a pour longueur d'onde λ_{DB} :

$$L_{0,\text{calc}} = \frac{\lambda_{DB}\,D_2}{a} = \frac{5{,}17 \times 10^{-12} \times 564 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-9}} = 2{,}9 \times 10^{-5}\ \text{m} = 29\ \mu\text{m}$$

Comparaison. Écart relatif : $\dfrac{29-27}{29} \approx 7\ \%$, de l'ordre de l'incertitude de lecture sur la courbe.

$L_{0,\text{exp}} \approx 27\ \mu\text{m}$ et $L_{0,\text{calc}} = 29\ \mu\text{m}$: les deux valeurs sont en accord, la relation de de Broglie est validée.



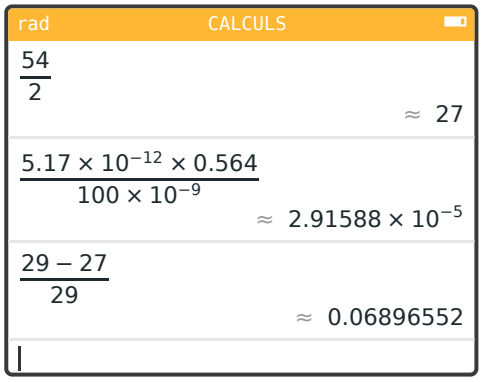
2.2.5 · Allure de la figure 6 : écart entre les deux premières franges voisines

PIÈGE
Prendre D_1 ou $D_1 + D_2$: la distance qui compte est celle du réseau à l'écran, D_2. Penser aussi à convertir $a = 100\ \text{nm} = 100 \times 10^{-9}\ \text{m}$.

COMPRENDRE
Une lecture entre 26 et 28 µm est acceptable. L'ordre de grandeur est remarquable : une longueur d'onde de quelques picomètres donne des franges espacées de dizaines de micromètres.

MÉTHODE
Mesurer l'écart entre les deux pics latéraux, puis diviser par deux : la lecture est deux fois plus précise que celle d'un seul écart au centre. Convertir à l'aide de l'échelle de l'axe.

À LA CALCULATRICE



2.2.6 Expliquer, à l'aide d'un raisonnement qualitatif, pourquoi les franges s'écartent vers le bas de la figure d'interférences.

Les molécules du faisceau n'ont pas toutes la même vitesse.

- Les molécules les plus lentes mettent plus de temps à parcourir le dispositif : elles tombent davantage (2.1.3) et frappent l'écran plus bas.
- Leur longueur d'onde de de Broglie est plus grande (2.2.4).
- D'après la relation 1, $L_0 = \dfrac{\lambda_{DB}\, D_2}{a}$ est proportionnelle à λ_{DB} : leurs franges voisines sont plus éloignées de la frange centrale.

Plus on descend sur l'écran, plus les molécules sont lentes, donc plus λ_{DB} et L_0 sont grandes : les franges s'écartent vers le bas.

COMPRENDRE
La pesanteur trie les molécules par vitesse, comme un prisme sépare les couleurs. Chaque ligne horizontale de la figure 5 correspond à une vitesse, donc à une longueur d'onde.