La mécanique au service de la pétanque

Bac S 2017 Liban (ancien programme) · Exercice 1 **5 points** **Durée conseillée 50 min**

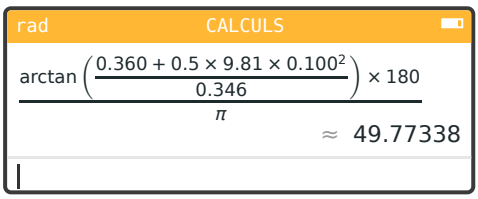
1.1 Partie A. Déterminer, à partir de la chronophotographie, la valeur de l'angle α entre l'horizontale et le vecteur vitesse initiale, en précisant la méthode.

Le vecteur $\overrightarrow{V_0}$ est tracé sur la chronophotographie, à partir de O. On mesure au rapporteur l'angle qu'il fait avec l'axe horizontal (Ox).

Autre méthode possible : mesurer à la règle la longueur ℓ de la flèche et celle ℓ_x de sa projection sur (Ox), puis calculer $\cos\alpha = \dfrac{\ell_x}{\ell}$.

$\alpha \approx 50^\circ$ (toute valeur lue entre 48° et 51° convient)

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Lire l'angle sur la corde entre deux positions éloignées de la boule : la trajectoire se courbe, l'angle obtenu est trop petit. Seule la tangente en O, donc la flèche $\overrightarrow{V_0}$, convient.

COMPRENDRE
Contrôle avec le tableau, à $t = 0{,}100$ s : les équations horaires donnent $\tan\alpha = \dfrac{y + \frac{1}{2}g\,t^2}{x} = \dfrac{0{,}409}{0{,}346}$, soit $\alpha \approx 50^\circ$. La mesure est cohérente.

1.2 En exploitant le modèle de la chute libre et les résultats expérimentaux, déterminer la valeur de la vitesse initiale V_0.

Données utiles $\alpha \approx 50^\circ$ (1.1) ; tableau : à $t = 0{,}100$ s, $x = 0{,}346$ m

D'après le modèle, $x = V_0\cos(\alpha)\,t$: l'abscisse est proportionnelle au temps, donc

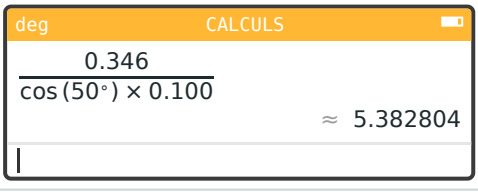
$$V_0 = \frac{x}{\cos(\alpha)\,t}$$

Avec le dernier point du tableau, le plus éloigné de O (meilleure précision relative) :

$$V_0 = \frac{0{,}346}{\cos(50^\circ) \times 0{,}100} = 5{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$V_0 \approx 5{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Utiliser l'équation de y en oubliant le terme $-\frac{1}{2}g\,t^2$, ou laisser la calculatrice en radians pour $\cos(50^\circ)$.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement : l'angle α n'est connu qu'à un ou deux degrés près. Avec $\alpha = 48^\circ$ on trouve $5{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, avec 51° on trouve $5{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: ces valeurs sont acceptées.

MÉTHODE
Pour exploiter tous les points, tracer x en fonction de t : on obtient une droite passant par l'origine, de coefficient directeur $V_0\cos\alpha$.

2.1 Montrer que la trajectoire de la boule est une parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{(V_0\cos\alpha)^2} + \tan(\alpha)\,x$.

On élimine le temps entre les deux équations horaires.

De $x = V_0\cos(\alpha)\,t$ on tire $t = \dfrac{x}{V_0\cos\alpha}$.

On reporte dans $y = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + V_0\sin(\alpha)\,t$:

$$y = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{V_0\cos\alpha}\right)^2 + V_0\sin\alpha\times\frac{x}{V_0\cos\alpha}$$

Comme $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$:

$y = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{(V_0\cos\alpha)^2} + \tan(\alpha)\,x$: de la forme $y = a\,x^2 + b\,x$ avec $a < 0$, c'est une parabole tournée vers le bas.

PIÈGE
Oublier de justifier le mot « parabolique » : il faut dire que y est un polynôme du second degré en x.

MÉTHODE
Équation de trajectoire : isoler t dans l'équation de x (la plus simple), le remplacer dans celle de y, puis simplifier.

2.2 Pour $\alpha = 51^\circ$ et $V_0 = 5{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, calculer l'abscisse du point d'impact de la boule avec le sol.

Données utiles O est à 1,2 m au-dessus du sol ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Le sol est à 1,2 m sous l'origine O : au point d'impact, $y = -1{,}2$ m.

L'équation de la trajectoire s'écrit $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ avec :

$a = -\dfrac{g}{2\,(V_0\cos\alpha)^2} = -\dfrac{9{,}81}{2\times(5{,}5\times\cos 51^\circ)^2} = -0{,}409\ \text{m}^{-1}$; $b = \tan 51^\circ = 1{,}23$; $c = 1{,}2$ m.

Discriminant, calculé avec les valeurs non arrondies de a et b : $\Delta = b^2 - 4ac = 3{,}49 > 0$.

Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -0{,}77$ m et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 3{,}8$ m.

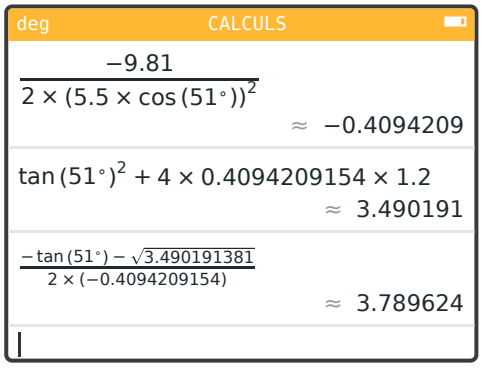
La boule est lancée vers les x positifs : on retient x_2.

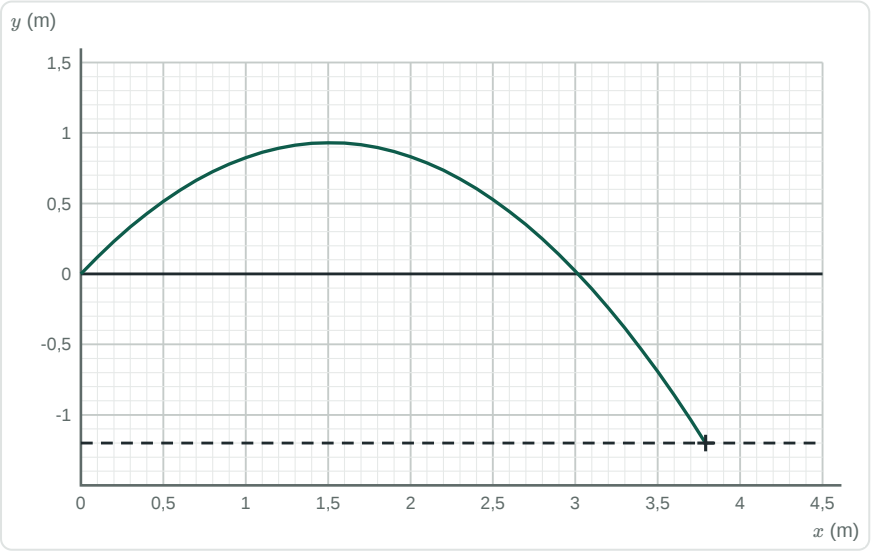
$x_{\text{impact}} \approx 3{,}8$ m

PIÈGE
Écrire $y = +1{,}2$ m ou $y = 0$ à l'impact. L'origine est la main du joueur, pas le sol : le sol a une ordonnée négative.

COMPRENDRE
Garder les valeurs de a et b en mémoire de la calculatrice : avec les arrondis intermédiaires on obtient 3,78 m au lieu de 3,79 m. Résultat cohérent : le bouchon est à 6 m au moins, la boule doit encore rouler.

À LA CALCULATRICE





2.2 · Trajectoire calculée ($\alpha = 51^\circ$, $V_0 = 5{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) ; le sol est la droite $y = -1{,}2$ m

1 Partie B. Nommer les deux grandeurs dont la conservation est exprimée par les deux relations données pour le choc.

Première relation, vectorielle, en $m\vec{V}$: conservation de la **quantité de mouvement** du système formé par les deux boules, $\vec{p} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$ (la boule 1 est immobile avant le choc).

Seconde relation, en $\frac{1}{2}mV^2$: conservation de l'**énergie cinétique** du système.

Quantité de mouvement et énergie cinétique du système {boule 1 + boule 2}.

COMPRENDRE
La quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ et sa conservation figuraient au programme de Terminale S. Elles ne sont plus au programme actuel de spécialité, où la deuxième loi de Newton s'écrit avec l'accélération.

COMPRENDRE
Un choc qui conserve aussi l'énergie cinétique est dit élastique : c'est un modèle, acceptable pour deux boules d'acier.

2 Partie B. Associer chaque relation entre les masses (A : $m_1 = m_2$; B : $m_1 > m_2$; C : $m_1 < m_2$) à l'une des propositions 1, 2 ou 3, en justifiant.

Données utiles $\overrightarrow{V_1'} = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{V_2}$; $\overrightarrow{V_2'} = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{V_2}$

Le coefficient de $\overrightarrow{V_1'}$ est toujours positif : la boule 1 part dans le sens de $\overrightarrow{V_2}$. Tout dépend du signe de $m_2 - m_1$.

A ($m_1 = m_2$) : $\overrightarrow{V_1'} = \frac{2m_2}{2m_2}\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_2'} = \vec{0}$. La boule 2 s'arrête, la boule 1 prend sa vitesse : proposition 3.

B ($m_1 > m_2$) : $m_2 - m_1 < 0$, donc $\overrightarrow{V_2'}$ est de sens opposé à $\overrightarrow{V_2}$. La boule G_2 repart en sens inverse : proposition 1.

C ($m_1 < m_2$) : $m_2 - m_1 > 0$, donc $\overrightarrow{V_2'}$ garde le sens de $\overrightarrow{V_2}$. De plus $m_2 - m_1 < 2m_2$, donc $V_2' < V_1'$: la boule G_2 avance derrière G_1, moins vite. Proposition 2.

A – 3 ; B – 1 ; C – 2

COMPRENDRE
Le schéma du sujet représente le cas C. Avec les masses du texte (pointeur 710 g, tireur 700 g au plus), on est dans le cas B, tout près de A : la boule du tireur reste presque sur place.

MÉTHODE
Deux vecteurs liés par $\vec{u} = k\vec{v}$ ont le même sens si $k > 0$ et des sens opposés si $k < 0$. Il suffit d'étudier le signe du coefficient.

3 Partie B. Que se passe-t-il si la masse m_1 est très largement supérieure à la masse m_2 ?

Si $m_1 \gg m_2$, alors $m_1 + m_2 \approx m_1$ et $m_2 - m_1 \approx -m_1$.

$\frac{2m_2}{m_1+m_2} \approx \frac{2m_2}{m_1} \approx 0$, donc $\overrightarrow{V_1'} \approx \vec{0}$: la boule 1 reste pratiquement immobile.

$\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} \approx -1$, donc $\overrightarrow{V_2'} \approx -\overrightarrow{V_2}$.

La boule 2 rebondit sur la boule 1, qui ne bouge presque pas, et repart en sens inverse avec la même valeur de vitesse, $8{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

COMPRENDRE
C'est le rebond d'une balle sur un mur : l'obstacle très lourd reçoit de la quantité de mouvement mais presque aucune énergie cinétique.