Coucher de soleils sur Tatooine

Bac S 2016 Métropole (ancien programme) · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 50 min**

1.1 En s'appuyant sur la photo et sur le texte, montrer que le rayon de chacune des deux étoiles vaut environ deux millions de kilomètres. Justifier la démarche.

Données utiles texte : distance entre les deux étoiles $d \approx 10$ millions de km ; photo du sujet

Les deux étoiles sont à la même distance de Tatooine : elles apparaissent sur la photo à la même échelle. Les longueurs mesurées sur la photo sont donc proportionnelles aux longueurs réelles.

Mesures à la règle sur la photo : diamètre d'une étoile ≈ 7 mm ; distance entre les centres des deux étoiles ≈ 18 mm.

D'après le texte, ces 18 mm représentent $d \approx 10$ millions de km. Par proportionnalité, le diamètre réel $2R$ vérifie :

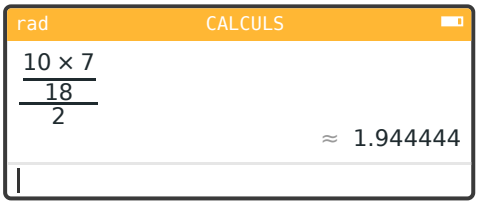
$$\frac{2R}{d} = \frac{7}{18} \quad \text{donc} \quad R = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{7}{18} = 1{,}9 \text{ million de km}$$

$R \approx 1{,}9 \times 10^6$ km, soit environ 2 millions de km comme attendu.

PIÈGE
Mesurer la distance de bord à bord au lieu de centre à centre, ou oublier de diviser par 2 : la photo donne le diamètre, la question demande le rayon.

COMPRENDRE
Seul le rapport des deux longueurs compte : il ne dépend pas de la taille d'impression du sujet. Le bord flou des étoiles limite la précision, d'où un seul chiffre significatif pour R.

À LA CALCULATRICE



1.2 En supposant que les deux étoiles ont la même masse volumique moyenne que le Soleil, évaluer l'ordre de grandeur de la masse M_{Tatoo} d'une étoile. Commenter.

Données utiles $M_S = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg ; $R_S = 7{,}0 \times 10^5$ km ; $R = 2 \times 10^6$ km (1.1) ; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Masse volumique d'une sphère : $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3}$.

Égalité des masses volumiques : $\frac{M_{\text{Tatoo}}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M_S}{\frac{4}{3}\pi R_S^3}$, donc

$$M_{\text{Tatoo}} = M_S \left(\frac{R}{R_S}\right)^3 = 2{,}0 \times 10^{30} \times \left(\frac{2 \times 10^6}{7{,}0 \times 10^5}\right)^3 = 4{,}7 \times 10^{31} \text{ kg}$$

$M_{\text{Tatoo}} \approx 4{,}7 \times 10^{31}$ kg : ordre de grandeur 10^{31} kg.

Commentaire : $\frac{M_{\text{Tatoo}}}{M_S} \approx 23$. Chaque étoile serait une vingtaine de fois plus massive que le Soleil, alors que le texte les décrit comme assez semblables à lui : l'hypothèse d'une même masse volumique est discutable.

PIÈGE
Oublier le cube : un rayon environ 3 fois plus grand donne un volume, donc une masse, environ 23 fois plus grands, pas 3 fois.

MÉTHODE
Dans un rapport, les deux rayons doivent seulement avoir la même unité : inutile de convertir les kilomètres en mètres, et le facteur $\frac{4}{3}\pi$ se simplifie.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$2.0 \times 10^{30} \times \left(\frac{2 \times 10^6}{7.0 \times 10^5}\right)^3 \approx 4.664723 \times 10^{31}$

$\left(\frac{2 \times 10^6}{7.0 \times 10^5}\right)^3 \approx 23.32362$

2.1 Justifier, à l'aide du texte, que du point de vue de Tatooine les deux étoiles se comportent comme une étoile unique de masse $9{,}5 \times 10^{31}$ kg.

Données utiles texte : étoiles distantes d'environ 10 millions de km ; Tatooine à 200 millions de km ; $M_{\text{Tatoo}} = 4{,}7 \times 10^{31}$ kg (1.2)

Tatooine est à 200 millions de km de ses étoiles, elles-mêmes séparées d'environ 10 millions de km : la planète est 20 fois plus loin des étoiles que celles-ci ne le sont l'une de l'autre. Le critère de stabilité du texte (au moins 4 fois) est largement rempli.

Vues de Tatooine, les deux étoiles sont donc presque au même endroit et à la même distance : leurs attractions s'ajoutent comme celle d'un seul astre dont la masse est la somme des deux masses.

$M_{12} = 2\,M_{\text{Tatoo}} = 2 \times 4{,}7 \times 10^{31} = 9{,}3 \times 10^{31}$ kg, proche de la valeur $9{,}5 \times 10^{31}$ kg retenue.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$2 \times 4.66 \times 10^{31} \approx 9.32 \times 10^{31}$

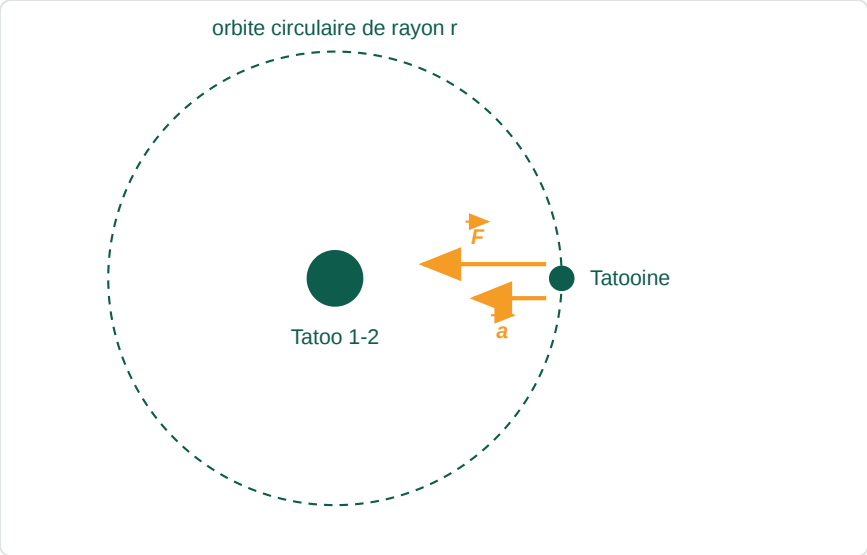
2.2 Faire un schéma du système Tatooine-Tatoo 1-2 et représenter, sans souci d'échelle, la force gravitationnelle exercée par Tatoo 1-2 sur Tatooine et le vecteur accélération de Tatooine.

La force $\overrightarrow{F}$ exercée par Tatoo 1-2 sur Tatooine est attractive : elle s'applique au centre de Tatooine, sa direction est la droite qui joint les deux centres et elle est orientée vers Tatoo 1-2.

Tatooine n'est soumise qu'à cette force. D'après la deuxième loi de Newton, $\overrightarrow{F} = m\,\vec{a}$ avec $m > 0$: l'accélération a la même direction et le même sens que la force.

$\overrightarrow{F}$ et $\vec{a}$ sont tous deux dirigés de Tatooine vers le centre de Tatoo 1-2 (voir le schéma).

PIÈGE
Tracer l'accélération tangente à la trajectoire, comme la vitesse. Sur une orbite circulaire, $\vec{a}$ est dirigée vers le centre attracteur, comme la force.



2.2 · Tatooine en orbite autour de Tatoo 1-2 : force et accélération (les deux vecteurs partent du centre de Tatooine ; ils sont décalés pour la lisibilité)

2.3 Montrer que le mouvement, supposé circulaire, de Tatooine dans le référentiel lié à Tatoo 1-2 est uniforme.

Système {Tatooine}, de masse m constante ; référentiel lié à Tatoo 1-2, supposé galiléen ; orbite circulaire de rayon r. Repère de Frenet $(\vec{u}_N, \vec{u}_T)$ lié à Tatooine, $\vec{u}_N$ dirigé vers le centre de Tatoo 1-2.

Seule force : $\overrightarrow{F} = \dfrac{G\,m\,M_{12}}{r^2}\,\vec{u}_N$.

Deuxième loi de Newton : $\overrightarrow{F} = m\,\vec{a}$, donc

$$\vec{a} = \frac{G\,M_{12}}{r^2}\,\vec{u}_N + 0\,\vec{u}_T$$

Or, dans le repère de Frenet : $\vec{a} = \dfrac{v^2}{r}\,\vec{u}_N + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_T$.

Par identification selon $\vec{u}_T$:

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: la valeur v de la vitesse est constante, le mouvement circulaire est **uniforme**.

PIÈGE
Conclure « $\vec{a}$ est constant donc le mouvement est uniforme ». Le vecteur $\vec{a}$ change de direction : c'est sa composante tangentielle nulle qui prouve que v ne varie pas.

MÉTHODE
Orbite circulaire : 1) deuxième loi de Newton ; 2) $\vec{a}$ dans le repère de Frenet ; 3) identification. Selon $\vec{u}_T$: mouvement uniforme. Selon $\vec{u}_N$: la vitesse, utile à la question suivante.

2.4 Déduire des résultats précédents et du texte la valeur de la période de révolution de Tatooine. La comparer à celle de la Terre autour du Soleil.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$; $M_{12} = 9{,}5 \times 10^{31}$ kg ; texte : $r = 200$ millions de km $= 2{,}0 \times 10^{11}$ m

Identification selon $\vec{u}_N$ (2.3) : $\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{G\,M_{12}}{r^2}$, donc $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_{12}}{r}}$.

Le mouvement est uniforme : pendant une période T, Tatooine parcourt le périmètre $2\pi r$ de son orbite à la vitesse v.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M_{12}}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(2{,}0 \times 10^{11})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 9{,}5 \times 10^{31}}} = 7{,}1 \times 10^6\ \text{s}$$

Soit $T = \dfrac{7{,}1 \times 10^6}{24 \times 3600} \approx 82$ jours. La Terre fait le tour du Soleil en 365,25 jours.

$T \approx 7{,}1 \times 10^6$ s ≈ 82 jours : l'année de Tatooine est environ 4,5 fois plus courte que l'année terrestre ($T \approx 0{,}22$ an).

PIÈGE

Laisser r en kilomètres. G est en unités SI : r doit être en mètres, soit $200 \times 10^6 \times 10^3 = 2{,}0 \times 10^{11}$ m.

COMPRENDRE

Deux chiffres significatifs, comme r et M_{12}. L'astre central est près de 50 fois plus massif que le Soleil : l'attraction est bien plus forte, la planète tourne plus vite malgré une orbite du même ordre de grandeur.

À LA CALCULATRICE

